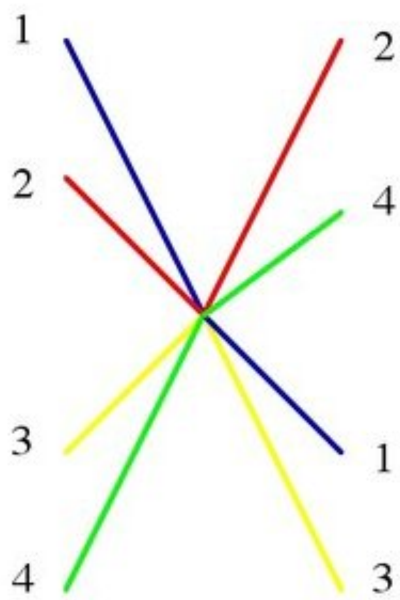
23 juillet 2009 0 commentaire — commenter cet article

Echos de la recherche

Quand quatre courbes se rencontrent

Une observation de Maxim Kontsevich

Étienne Ghys
Directeur de recherche CNRS, École Normale Supérieure de Lyon (page web)



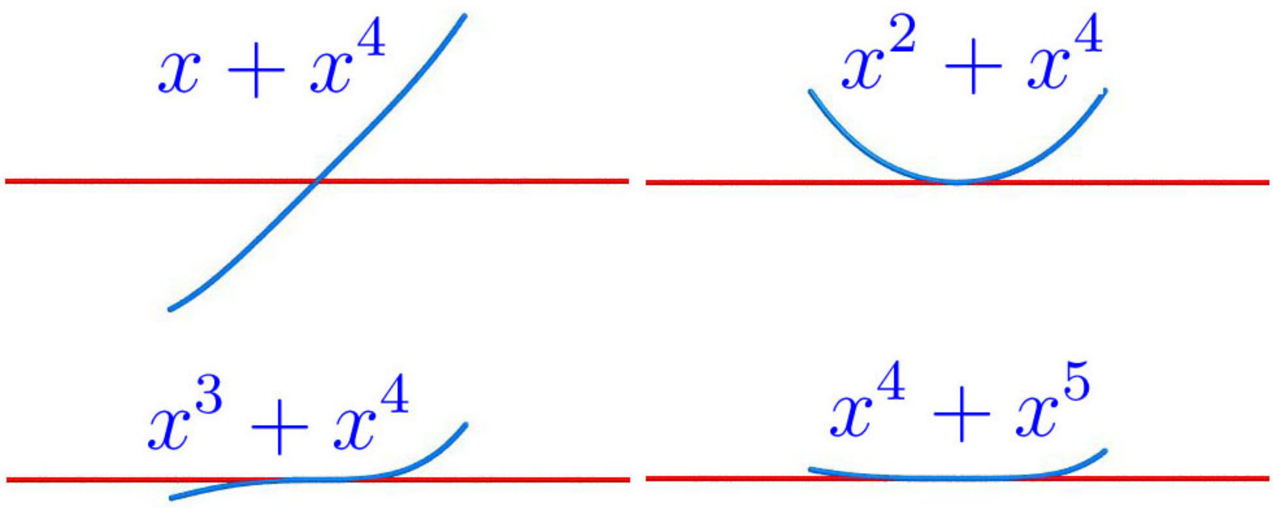
Avant-hier, Maxim Kontsevich m'a montré un joli résultat nouveau : une de ces petites choses élémentaires qui font le régal des mathématiciens.

Nous allons observer les graphes de plusieurs fonctions, et leurs positions mutuelles. Pour ne pas faire des choses compliquées, nous allons nous limiter à des fonctions polynomiales [1]. Rappelons qu'une fonction f d'une variable réelle x est un *polynôme* si elle s'écrit sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

où les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels.

Dans un premier temps, nous allons observer le graphe d'un tel polynôme près d'un point où il rencontre l'axe des abscisses, que nous supposerons pour simplifier être l'origine $(0, 0)$. Nous supposons donc que $f(0) = 0$ ou, ce qui revient au même, que $a_0 = 0$. Voici quelques exemples de tels graphes (en bleu le graphe et en rouge l'axe des abscisses) :



Le comportement du graphe au voisinage de l'origine est décrit par le premier terme non nul dans l'écriture de f. Il sera utile d'introduire une définition. Si $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ sont tous nuls et a_k est non nul, nous dirons que la **valuation** de f à l'origine est égale à k. Par exemple, la *valuation* de $x^3 - x^7 + x^9$ est 3 alors que celle de $x^2 - x^3 - 7x^{10}$ est 2. Alors, on a la règle suivante :

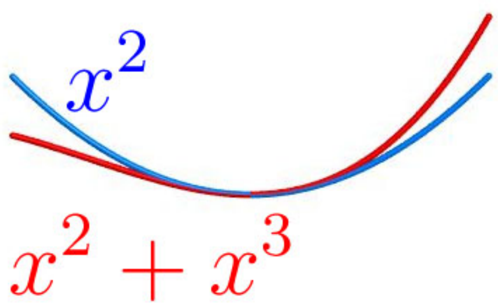
- Si la *valuation* est paire, le graphe de f reste d'un même côté de l'axe des abscisses au voisinage de l'origine. Bien sûr, le graphe est au dessus ou en dessous de l'axe suivant le signe du premier coefficient non nul.
- Si la *valuation* est impaire, le graphe de f traverse l'axe des abscisses. Il peut passer du dessous vers le dessus ou le contraire, suivant le signe du premier terme non nul.

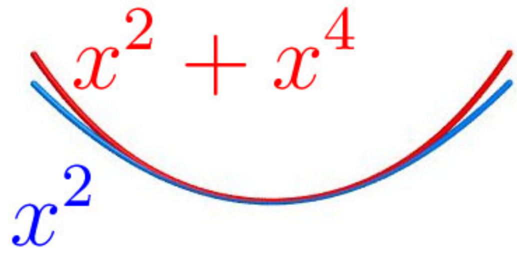
La vérification de ce fait bien connu et élémentaire est laissée en exercice mais elle est fondée sur le fait que si x est petit, les termes additionnels $a_{k+1}x^{k+1} + \ldots + a_n x^n$ sont négligeables par rapport au terme dominant $a_k x^k$ qui dicte donc son signe...

Supposons maintenant que l'on dessine le graphe de **deux polynômes** f_1 et f_2 et que l'on observe ce qui se passe au voisinage d'un point d'intersection, qu'on peut supposer par exemple être l'origine. Facile ! Pour comparer f_1 et f_2, il suffit bien sûr de considérer la différence $f = f_1 - f_2$ et on obtient donc la conclusion suivante :

- Si la *valuation* de $f_1 - f_2$ est paire, les deux graphes se touchent mais ne se traversent pas à l'origine.
- Si la *valuation* de $f_1 - f_2$ est impaire, les deux graphes se traversent à l'origine.

Voici quelques exemples :





Passons à l'étude de trois graphes de **trois polynômes** f_1, f_2, f_3, passant tous les trois par l'origine. On peut étudier de la même manière les positions respectives des graphes en calculant les *valuations* des différences $f_1 - f_2, f_2 - f_3, f_3 - f_1$ et les signes des premiers coefficients non nuls.

Voici six exemples simples :

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = -x^2$$

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = -x^3, \quad f_3(x) = 0$$

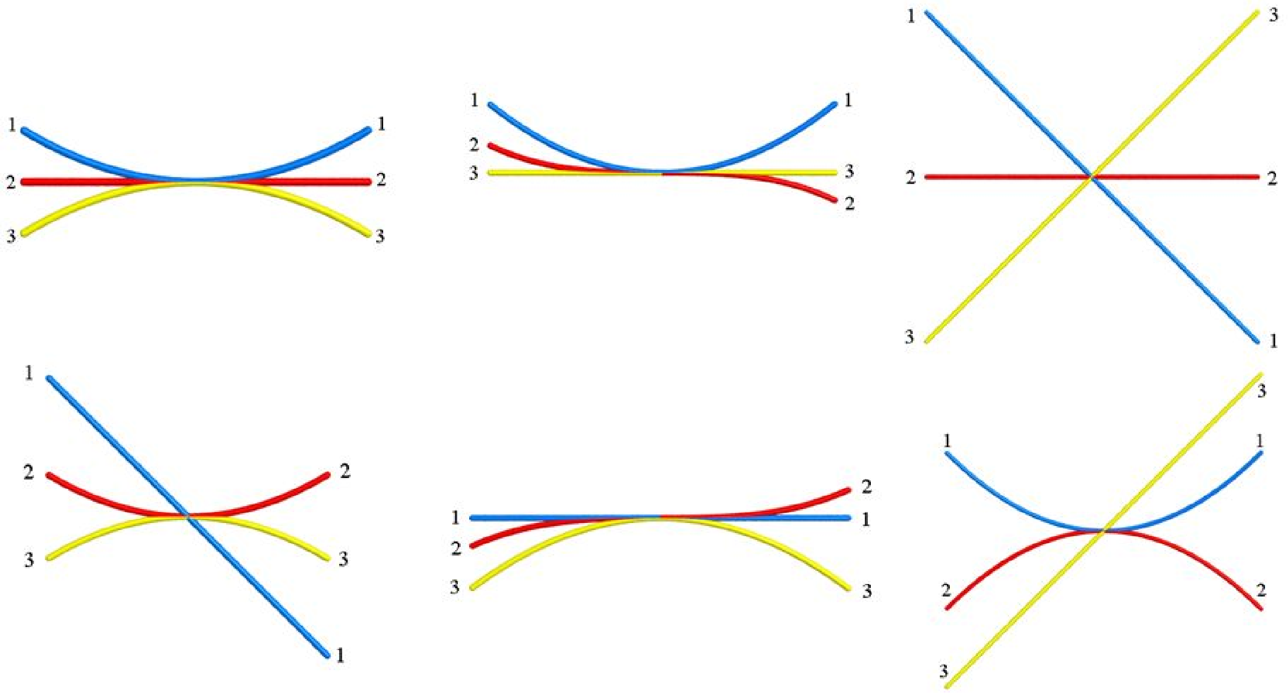
$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x^3, \quad f_3(x) = -x^2$$

$$f_1(x) = -x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = -x^2$$

$$f_1(x) = -x, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = x$$

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = -x^2, \quad f_3(x) = x$$

et voici les graphes :



Pourquoi ces six exemples ? Observons les trois courbes légèrement à gauche de l'origine, c'est-à-dire pour x légèrement négatif et rangeons-les par ordonnée décroissante. Les choix ont été faits pour que la courbe la plus haute soit celle de f_1, suivie de celle de f_2 et enfin celle de f_3. Mais observons maintenant la situation un peu à droite de l'origine. L'ordre des courbes a été permuté : on est passé de l'ordre $(1, 2, 3)$ à un autre ordre, respectivement :

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1)$$

$$(2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2).$$

On voit donc que **toutes les six permutations sont possibles** lorsque trois courbes se croisent.

L'observation de Maxim Kontsevich est qu'à partir de quatre courbes, ce n'est plus vrai...

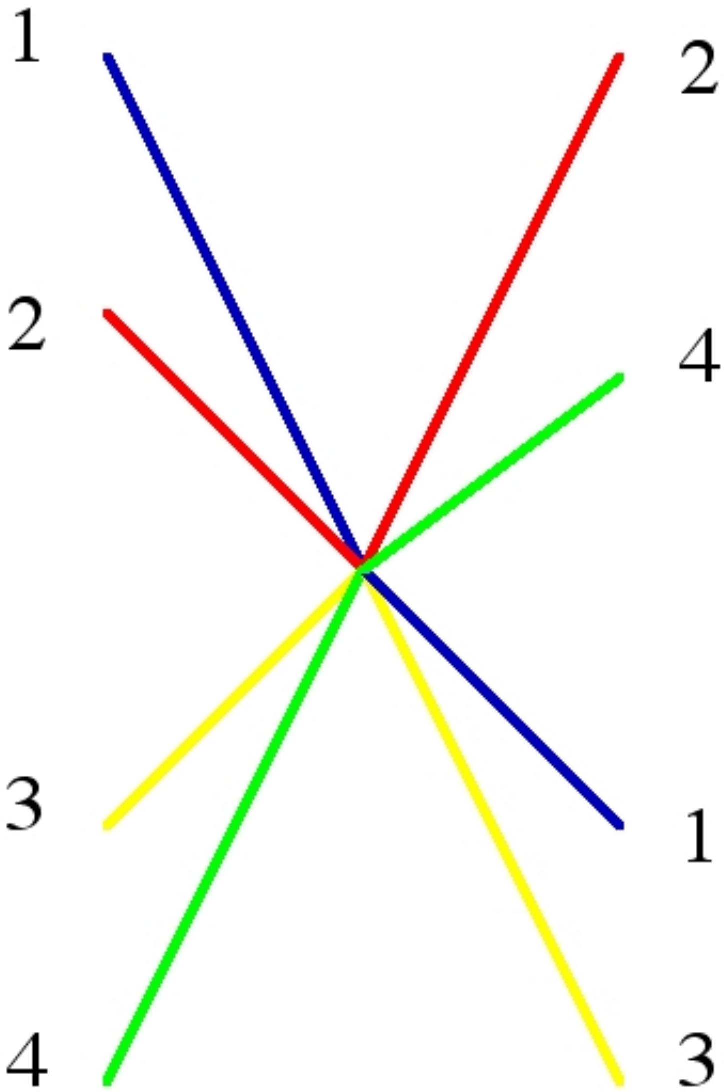
Lorsque quatre graphes de quatre polynômes se croisent, ils ne peuvent pas le faire de n'importe quelle manière : la permutation de $(1, 2, 3, 4)$ qui apparaît n'est pas quelconque.

Soyons plus précis : la permutation $(1, 2, 3, 4) \to (2, 4, 1, 3)$ n'est pas possible.

Théorème *: Il est impossible de trouver quatre polynômes f_1, f_2, f_3, f_4 tels que :*

- *Ils sont tous les quatre nuls en 0,*
- $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x) > f_4(x)$ *pour x négatif suffisamment petit,*
- $f_2(x) > f_4(x) > f_1(x) > f_3(x)$ *pour x positif suffisamment petit.*

Démontrons ce théorème par l'absurde, en supposant qu'il existe quatre tels polynômes. La figure serait quelque chose comme ceci, mais notez que j'ai dessiné des courbes qui ont des coins puisque précisément le théorème consiste à dire qu'il n'est pas possible de dessiner ceci avec des courbes polynomiales...



Observons les différences avec f_1 :

- $f_2 - f_1$ est négatif pour x négatif petit, et positif pour x positif petit. Il change donc de signe et sa *valuation* est donc un nombre impair, que nous noterons i.
- $f_3 - f_1$ est négatif pour x négatif petit, et négatif pour x positif petit. Il ne change donc pas de signe et sa *valuation* est donc un nombre pair, que nous noterons p.
- $f_4 - f_1$ est négatif pour x négatif petit, et positif pour x positif petit. Il change donc de signe et sa *valuation* est donc un nombre impair, que nous noterons i'.

Maintenant, comparons les f_2, f_3, f_4 entre eux, et notons les conclusions :

- $f_3 - f_2$ est négatif pour x négatif petit, et négatif pour x positif petit si bien que sa *valuation* est paire. Mais bien sûr, $f_3 - f_2 = (f_3 - f_1) - (f_2 - f_1)$. Nous savons que $f_3 - f_1$ a une *valuation* paire p et que $f_2 - f_1$ a une *valuation* impaire i. Leur différence ne peut donc être de *valuation* paire que si $i > p$.
- $f_4 - f_3$ est négatif pour x négatif petit, et positif pour x positif petit, si bien que sa *valuation* est impaire. Mais bien sûr, $f_4 - f_3 = (f_4 - f_1) - (f_3 - f_1)$. Nous savons que $f_4 - f_1$ a une *valuation* impaire i' et que $f_3 - f_1$ a une *valuation* paire p. Leur différence ne peut donc être de *valuation* impaire que si $p > i'$.
- $f_4 - f_2$ est négatif pour x négatif petit, et négatif pour x positif petit si bien que sa *valuation* est paire.

> Mais bien sûr, $f_4 - f_2 = (f_4 - f_1) - (f_2 - f_1)$. Nous savons que $f_4 - f_1$ a une *valuation* impaire i' et que $f_2 - f_1$ a une *valuation* impaire i. Leur différence ne peut donc être de *valuation* paire que si $i = i'$ pour que les termes dominants s'annulent.

Mais les inégalités $p > i'$ et $i > p$ sont bien sûr incompatibles avec l'égalité $i = i'$. Nous avons une contradiction et l'hypothèse de l'existence de ces quatre polynômes était absurde : **le théorème est démontré** !

Il y a $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ permutations possibles des quatre symboles $(1, 2, 3, 4)$ et nous venons de voir que $(1, 2, 3, 4) \to (2, 4, 1, 3)$ n'apparaît pas lorsque quatre courbes polynomiales se croisent. Le lecteur n'aura aucune difficulté à trouver une autre permutation analogue qui n'apparaît pas. Mais pourra-t-il montrer que les 22 autres permutations sont effectivement possibles ?

Lorsque j'ai expliqué ce petit théorème hier matin à mon ancien étudiant Victor Kleptsyn, il n'a pas tardé à réagir comme tout mathématicien : que se passe-t-il avec 5 courbes ? avec n courbes ? Moins d'une demi-heure plus tard, il revenait me voir avec un joli argument pour démontrer que lorsque n devient très grand, parmi les $n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1$ permutations de n objets, il n'y en a qu'une toute petite proportion qui apparaissent lorsque n polynômes se croisent.

Le lecteur pourra-t-il le montrer lui-même ? Pourra-t-il caractériser les « bonnes » permutations, les compter ? S'il ne le peut pas, il devra attendre la **suite de cet article**, mais elle sera sur une piste noire !

Notes

[1] Le lecteur plus savant notera tout de suite que ce qui suit s'adapte sans problèmes aux fonctions analytiques, mais que rien de tel ne serait vrai pour les fonctions infiniment différentiables.

Affiliation de l'auteur

Pour citer cet article : **Étienne Ghys**, **« Quand quatre courbes se rencontrent »** — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009.

En ligne, URL : **`http://images.math.cnrs.fr/Quand-quatre-courbes-se.html`**

Si vous avez aimé cet article, voici quelques suggestions automatiques qui pourraient vous intéresser :

- **Sidereus Nuncius... aujourd'hui**, par **Étienne Ghys** et **Jos Leys**
- **Quand beaucoup de courbes se rencontrent** , par **Étienne Ghys**
- **Un carré dans une courbe** , par **Étienne Ghys**