Algorithmique td 7
approximations de nombres réels

Exercice 1 (Approximation de e).
En utilisant les suites adjacentes $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$, écrire une procédure `Approxe :=proc(eps)` qui détermine une valeur approchée de e à `eps` près.

Exercice 2 (Approximation de $\sqrt{2}$ par dichotomie).
En utilisant des suites dichotomiques, écrire une procédure `Approxrac :=proc(eps)` qui détermine une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à `eps` près. Généraliser cette procédure à la recherche de $\sqrt{p}$ si $p \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré d'entier.
On pensera que $\sqrt{2}$ est un zéro de la fonction polynomiale $x \mapsto x**2-2$, et c'est le seul entre 0 et 2.

Exercice 3 (Constante γ d'Euler).
On suppose que l'on dispose d'une fonction ln. On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la série harmonique.

1. Montrer que les suites $(H_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(H_n - \ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire une procédure `Approxgamma :=proc(eps)` qui donne une approximation de la constante γ d'Euler à `eps` près. *On rappelle que la constante γ est donnée par la relation $H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$.*

Exercice 4 (Approximation de π par une série d'Euler).
On s'intéresse aux deux suites de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que les deux suites sont adjacentes.
2. On admet que leur limite commune est $\frac{\pi^2}{6}$. En déduire un encadrement de π.
3. Écrire une procédure `Euler` de la variable `eps` qui donne une valeur approchée de π par défaut à *eps* près.
4. La tester et obtenir une approximation à 10^{-3} près.

Exercice 5 (Approximation de π par la méthode d'Archimède).

1. Rappeler la définition des racines n^{ieme} de l'unité.
2. À l'aide du périmètre du polygone régulier formé par ces racines, montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant 2\pi$.
3. Calculer le rayon du cercle inscrit dans ce polygone et en déduire que $2\pi \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
4. En déduire un encadrement de π et une procédure `Archimede` utilisant les fonctions sinus, tangente et la valeur de π de maple.
5. Comment faire pour obtenir une procédure n'utilisant pas les fonctions circulaires ni de valeur pré-établie de π ?

Exercice 6 (Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Theon de Smyrne).
On définit les suites récurrentes (u_n) et (v_n) par :
$u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $v_{n+1} = v_n + 2u_n$ et $u_{n+1} = v_n + u_n$.
Justifier que le quotient $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge vers $\sqrt{2}$ et écrire une procédure `theon :=proc(N)` qui calcule $\frac{v_N}{u_N}$.
Étudier expérimentalement la vitesse de la convergence.

Exercice 7 (Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Newton).
On définit la suite récurrente (x_n) par :
$x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$.
Justifier que la suite (x_n) converge vers $\sqrt{2}$ et écrire une procédure `newton :=proc(N)` qui calcule x_N.
Étudier expérimentalement la vitesse de la convergence.