

Formulaire de trigonométrie

I Valeurs particulières

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

II Périodicité et invariance

Proposition II.1 Pour tout réel t et tout entier relatif k (sous réserve de définition pour $\tan$) :

$$\begin{array}{lll}
 \cos(t + 2\pi) = \cos(t); & \sin(t + 2\pi) = \sin(t); & \tan(t + 2\pi) = \tan(t). \\
 \cos(t + k\pi) = (-1)^k \cos(t); & \sin(t + k\pi) = (-1)^k \sin(t); & \tan(t + k\pi) = \tan(t). \\
 \cos(-t) = \cos(t); & \sin(-t) = -\sin(t); & \tan(-t) = -\tan(t). \\
 \cos(\pi - t) = -\cos(t); & \sin(\pi - t) = \sin(t); & \tan(\pi - t) = -\tan(t). \\
 \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t); & \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t); & \tan(\frac{\pi}{2} - t) = \frac{1}{\tan(t)} = \cotan(t). \\
 \cos(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin(t); & \sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos(t); & \tan(\frac{\pi}{2} + t) = -\cotan(t).
 \end{array}$$

III Une propriété fondamentale

Proposition III.1

1. Pour tout réel t , $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
2. Réciproquement :

si a et b sont des réels tels que $a^2 + b^2 = 1$,
il existe un unique réel $t \in [0, 2\pi[$ tel que (*) $a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Remarque : l'équation (*) est satisfaite par tous les réels congrus à t modulo 2π et uniquement par eux.

IV Équations trigonométriques

Proposition IV.1 Soient u et v des réels.

- $\sin u = \sin v$ si, et seulement si, $u \equiv v \pmod{2\pi}$ ou $u \equiv \pi - v \pmod{2\pi}$;
- $\cos u = \cos v$ si, et seulement si, $u \equiv v \pmod{2\pi}$ ou $u \equiv -v \pmod{2\pi}$;
- $\cos u = \sin v$ si, et seulement si, $u \equiv \frac{\pi}{2} - v \pmod{2\pi}$ ou $u \equiv v - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$;
- $\tan u = \tan v$ si, et seulement si, $u \equiv v \pmod{\pi}$.

Remarque : si l'intervalle d'étude est réduit (à $[0, 2\pi]$ par exemple), les congruences ci-dessus peuvent devenir des égalités.

V Propriétés fonctionnelles

V.1 Formules d'addition

Rappelons les notations exponentielles :

$$\cos(u) = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(u) = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}.$$

Ceci permet d'obtenir les formules suivantes :

Proposition V.1 Soient a et b des réels.

- | | |
|---|--|
| 1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a);$ | 5. $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)};$ |
| 2. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a);$ | |
| 3. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b);$ | 6. $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$ |
| 4. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b);$ | |

V.2 Un cas particulier : le doublement de l'angle

Les formules précédentes, avec $a = b$, donnent :

Proposition V.2 Soit a un réel.

- | | |
|--|--|
| a. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$ | c. $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2 a}.$ |
| b. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.$ | |

Remarque : le b. sera souvent utilisé sous la forme $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ ou $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.

V.3 La transformation $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$

Cette transformation est utilisée dans de nombreux calculs.

Proposition V.3 Soit $u \in \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. En posant $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$, nous obtenons

$$\cos(u) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin(u) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Si de plus $u \notin \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, alors nous avons également

$$\tan(u) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

V.4 Transformations entre sommes et produits

Les formules de la proposition V.1 permettent d'établir les propositions suivantes.

Proposition V.4 Soient a, b des réels.

- | | |
|---|--|
| a. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$ | d. $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$ |
| b. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)).$ | e. $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$ |
| c. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$ | f. $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$ |
| | g. $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$ |