I Définitions

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Rappel : si $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nous définissons $\lambda.f + \mu.g$ et $f \times g$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par :

$$\forall x \in I, \quad (\lambda.f + \mu.g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) \text{ et } (f \times g)(x) = f(x)g(x).$$

On dit alors que $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Définition I.1 (Relation d'ordre sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$) Si $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, définissons

$$f \leq g \quad \text{si} \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x).$$

Définition I.2 Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Définissons les applications de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ suivantes :

- (a) $|f| : x \mapsto |f|(x) = |f(x)|$;
- (b) $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$; $f^- = \frac{|f|-f}{2}$;
- (c) $\sup(f, g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$;
 $\inf(f, g) : x \mapsto \min(f(x), g(x))$.

Quelques propriétés de ces applications :

- $f^+ = \sup(f, 0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})})$; $f^- = -\inf(f, 0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})})$;
- $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$;
- $|f| = \sup(f^+, f^-)$.

Définition I.3 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Nous dirons que f est :

- (a) majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$;
- (b) minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \geq m$;
- (c) bornée si elle est majorée et minorée. (i.e $\exists M_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in I, |f(x)| \leq M_0$).

Remarque : si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est majorée, alors $\{f(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Et si f est minorée, alors $\{f(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Définition I.4

- (a) Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est majorée, notons $\sup_I(f)$ ou $\sup_{x \in I}(f(x))$ la borne supérieure de $\{f(x) \mid x \in I\}$.
- (b) Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est minorée, notons $\inf_I(f)$ ou $\inf_{x \in I}(f(x))$ la borne inférieure de $\{f(x) \mid x \in I\}$.

C'est à dire $\sup_{x \in I}(f(x)) = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$ et $\inf_{x \in I}(f(x)) = \inf\{f(x) \mid x \in I\}$.

Proposition I.5 L'ensemble $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ des fonctions bornées sur I est stable par $+$, $\cdot$ et $\times$.

Démonstration (idée) : Si f, g sont bornées, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f \times g$ et $\lambda.f + \mu.g$ sont bornées. CQFD

Exemples :

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$: f n'est pas majorée, donc $\sup_{\mathbb{R}}(f)$ n'est pas défini.

Par contre, $\inf_{\mathbb{R}}(f) = 0$. "L'inf est atteint" : $\inf_{\mathbb{R}}(f) = f(0)$

2. Soit $f :]3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$. Nous avons $I =]3, +\infty[$, $\sup_I(f) = \frac{1}{3}$ et $\inf_I(f) = 0$.

Et cette fois, aucune des bornes de f n'est atteinte : $\forall x \in I, f(x) \neq \sup_I(f)$ et $f(x) \neq \inf_I(f)$.

3. Si f et g sont majorées sur I , alors $f + g$ l'est aussi et $\sup_I(f + g) \leq \sup_I(f) + \sup_I(g)$.

Application : $I = \mathbb{R}; f = \cos$ et $g = \sin$. Alors $\sup_{\mathbb{R}}(f) = \sup_{\mathbb{R}}(g) = 1$ et $\sup_{\mathbb{R}}(f + g) = \sqrt{2}$.

Définition I.6 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

(a) f admet un maximum (global) en a (sur I) si $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$. Notons alors $f(a) = \max_I(f)$.

(b) f admet un maximum local en a si : $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in I, |x - a| < \eta \implies f(x) \leq f(a)$.

(c) f admet un minimum (global) en a (sur I) si $\forall x \in I, f(x) \geq f(a)$. Notons alors $f(a) = \min_I(f)$.

(d) f admet un minimum local en a si : $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in I, |x - a| < \eta \implies f(x) \geq f(a)$.

(e) f admet un extremum en a (sur I) si elle admet un maximum ou un minimum en a (sur I).

(f) f admet un extremum local en a si elle admet un maximum local ou un minimum local en a .

Exemples : étudier les applications suivantes, définies sur $\mathbb{R} : x \mapsto |x|; x \mapsto \cos(x); x \mapsto x^3 - 3x$.

Remarques :

1. si f admet un maximum sur I , alors $\sup_I(f) = \max_I(f)$. (Attention : la réciproque est fausse).

2. en remplaçant les inégalités larges par des strictes dans la définition I.6, nous obtenons les notions de maximum, maximum local, minimum, etc... strict.

Définition I.7 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Définissons que f est :

(a) croissante si $\forall x, y \in I, (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))$;

(b) strictement croissante si $\forall x, y \in I, (x < y \implies f(x) < f(y))$;

(c) décroissante si $\forall x, y \in I, (x \leq y \implies f(x) \geq f(y))$;

(d) strictement décroissante si $\forall x, y \in I, (x < y \implies f(x) > f(y))$;

(e) monotone si elle est croissante ou décroissante;

(f) strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proposition I.8 Soient J un autre intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f et g sont monotones (resp. strictement monotones),
alors $g \circ f$ est monotone (resp. strictement monotone).

Démonstration (idée) : étudier séparément les différents cas possibles.

Exercice : Montrer que si f est monotone, f est strictement monotone si, et seulement si, f est injective.

Définition I.9 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Définissons que f est :

(a) paire si I est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.

(b) impaire si I est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Remarque : f est paire si, et seulement si, son graphe est symétrique par rapport à l'axe (Oy) , alors que f est impaire si, et seulement si, son graphe est symétrique par rapport au point O .

Proposition I.10

Les ensembles des fonctions paires et impaires sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, supplémentaires dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$:

$$\{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \mid f \text{ est paire}\} \oplus \{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \mid f \text{ est impaire}\} = \mathcal{F}(I, \mathbb{R}).$$

Démonstration : exercice. (Penser à écrire $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.)

Définition I.11 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Un réel T est une période de f si $\forall x \in I, (x+T) \in I$ et $f(x+T) = f(x)$.

Nous dirons que f est périodique si elle admet une période T non nulle. f est alors dite T -périodique ou périodique de période T .

Proposition I.12

1. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Alors $\{T \in \mathbb{R} \mid T \text{ est une période de } f\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Soit $T \in \mathbb{R}$. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est } T\text{-périodique}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, stable par $\times$.

Démonstration : exercice.

II Théorèmes

Ces théorèmes, utiles pour l'étude des fonctions usuelles, seront revues et pour certaines démontrés plus tard dans le cours.

Rappelons tout d'abord le

Théorème II.1 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $a < b$ des réels et f une application continue sur $[a, b]$, alors

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \exists x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) = y,$$

c'est à dire $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$.

Ce qui permet de démontrer le

Théorème II.2 Soient $a < b$ des réels et f une application **continue** sur $[a, b]$.

1. Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
2. Si f est strictement décroissante sur $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

Application à la dérivation :

1. si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$,
alors f est strictement croissante sur $[a, b]$, et donc réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
2. si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $\forall x \in]a, b[, f'(x) < 0$,
alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$, et donc réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

Rappel : f dérivable sur $I \Rightarrow f$ continue sur I .

Et la réciproque est fautive. Exemple : $x \mapsto |x|$ est continue et non dérivable en 0.

Théorème II.3 Théorème de dérivation des fonctions composées

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ où $E, F, G \subset \mathbb{R}$.

Si $x \in E$ est tel que : $\begin{cases} f \text{ dérivable en } x \in E, \\ g \text{ dérivable en } y = f(x) \in F, \end{cases}$

alors $g \circ f$ est dérivable en x et

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Nous en déduisons :

Théorème II.4 : Théorème de dérivation de l'application réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection de E sur F . Notons $f^{-1} : F \rightarrow E$ son application réciproque.

Si $y \in F$ est tel que : $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } x = f^{-1}(y), \\ f'(f^{-1}(y)) = f'(x) \neq 0, \end{cases}$

alors f^{-1} est dérivable en y et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Remarque : la difficulté de ce théorème est le fait que f est dérivable en y .
Le calcul de $(f^{-1})'(y)$ lui est facile et à savoir refaire : il suffit de dériver l'égalité

$$(f \circ f^{-1})(y) = \text{Id}_E(y) = y.$$

Rappelons enfin

Théorème II.5 : Théorème fondamental de l'analyse

Soient f une application **continue sur un intervalle** I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Alors l'application

$$\begin{aligned} F &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt, \end{aligned}$$

est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

De plus, F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .