Dans tout ce qui suit, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,... sont des suites à valeurs complexes, c'est à dire telles que pour tout entier naturel n, z_n, u_n, v_n,... $\in \mathbb{C}$.

Définition 1 La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>bornée</u> dans $\mathbb{C}$ s'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout naturel n ,$|z_n| \leqslant M$.

Remarque : cela signifie que l'ensemble $Z = \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans $\mathbb{C}$.

Définition 2 La suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite <u>convergente</u> s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la suite <u>réelle</u> $(|z_n - \lambda|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarques :

1. cette définition équivaut à : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |z_n - \lambda| < \varepsilon)$;
2. une suite qui ne converge pas est appelée <u>divergente</u> ;
3. il n'y a pas d'équivalent pour les suites à valeurs complexes de « $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty$ » ;
4. l'étude des suites à valeurs complexes se déduit de (et se ramène à) l'étude des suites à valeurs réelles.

Proposition 3 *Un tel complexe λ, s'il existe, est <u>unique</u>. λ est la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et notons $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.*
Dans ce cas, nous dirons que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ.

Démonstration : Soient λ et λ' deux limites de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons $\varepsilon = |\lambda - \lambda'|$.

□ <u>Supposons que $\varepsilon > 0$</u> et posons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$.

Comme $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_1$, alors $|z_n - \lambda| < \eta$. De même, comme $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ', il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_2$, alors $|z_n - \lambda'| < \eta$. Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$: nous obtenons $|\lambda - \lambda'| \leq |\lambda - z_{n_0}| + |z_{n_0} - \lambda'| < \eta + \eta$. D'où $\varepsilon < \varepsilon$: <u>contradiction</u>. □ Finalement, $\lambda = \lambda'$. CQFD

Proposition 4 *Supposons que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :*

1. *$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;*
2. *$(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\lambda|$;*
3. *$(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{\lambda}$.*

Démonstration :

1. En utilisant la définition de la convergence pour $\varepsilon = 1$, nous obtenons l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, alors $|z_n - \lambda| < 1$, d'où en particulier $|z_n| < 1 + |\lambda|$.
   Posons $M = \max(1 + |\lambda|, |z_0|, \ldots, |z_{n_0-1}|) \in \mathbb{R}_+^*$. D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n, $z_n \leqslant M$: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée .
2. En remarquant que pour tout entier naturel n, $||z_n| - |\lambda|| \leqslant |z_n - \lambda|$, les résultats sur les suites rélles permettent alors de conclure.
3. C'est la même chose en remarquant que pour tout entier naturel n, $\left|\overline{z_n} - \overline{\lambda}\right| = |z_n - \lambda|$. CQFD

Proposition 5 *Tous les résultats obtenues dans $\mathbb{R}$ concernant les opérations sur les suites convergentes sont encore valables dans $\mathbb{C}$.*

En particulier, nous pouvons en déduire que $\mathcal{S}_c = \{$ suites à valeurs complexes convergentes $\}$ est une sous-algèbre de $\{$ suites à valeurs complexes$\} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et que l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{S}_c & \to & \mathbb{R} \\ & & (z_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} z_n \end{array}$$

est un morphisme d'algèbre.

Proposition 6 (Utilisation des parties réelles et imaginaires) *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs réelles et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs complexes définie par $z_n = x_n + iy_n$ pour tout naturel n.*
Soient a et b des réels et $c = a + ib \in \mathbb{C}$. Il y a équivalence entre les énoncés :

(i) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers c ;*

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers a et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.*

C'est à dire qu'une suite à valeurs complexes converge si, et seulement si, les suites à valeurs réelles composées des parties réelles et imaginaires convergent.
De plus, nous avons $\lim_{n\to+\infty}(\ \mathrm{Re}(z_n)) = \ \mathrm{Re}(\lim_{n\to+\infty}(z_n))$ et $\lim_{n\to+\infty}(\ \mathrm{Im}(z_n)) = \ \mathrm{Im}(\lim_{n\to+\infty}(z_n))$.
Démonstration
(i) $\Longrightarrow$ (ii) : remarquons que pour tout entier naturel n,

$$|(x_n - a)| = \left|\frac{(z_n - c) + (\overline{z_n} - \overline{c})}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|z_n - c| + |\overline{z_n} - \overline{c}| \text{ et } |(y_n - b)| = \left|\frac{(z_n - c) - (\overline{z_n} - \overline{c})}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|z_n - c| + |\overline{z_n} - \overline{c}|.$$

La proposition 4 et les résultats sur les suites à valeurs réelles permettent de conclure.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) : il suffit de remarquer que pour tout entier naturel n, nous avons l'inégalité

$$|z_n - c| = |\ (x_n - a) + i(y_n - b)| \leqslant |(x_n - a)| + |(y_n - b)|.$$

CQFD

Exemples :

1. $u_n = \dfrac{(1+i)^n}{2^n}$ défini une suite qui converge vers 0. En effet, $|u|_n\ |=|\ (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^n}$;
2. $u_n = (1 + \dfrac{1}{2^n}) + (2 + \dfrac{1}{n})i$, $n \geqslant 1$ défini une suite qui converge vers $1 + 2i$;
3. $u_n = 1 + (-1)^n i$ défini une suite divergente.

Enfin, comme pour les suites à valeurs réelles, nous avons

Proposition 7 *Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs complexes qui converge vers λ,*
alors toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de même limite λ.

Exemple : la suite définie par $z_n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$ est divergente. En effet, les deux suites extraites de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = z_{4n} = 1$ et $v_n = z_{4n+1} = i$ convergent vers deux limites différentes.

Théorème 8 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite complexe bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*