Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, contenant au moins deux points et $a \in \overline{I}$, c'est-à-dire :

- soit $a \in I$;
- soit a est une borne de I (on peut avoir $a = +\infty$ ou $a = -\infty$).

Sans plus de précisions, f, g, h, φ, ... seront des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, généralement définies sur $I \setminus \{a\}$.

I Relations de domination et négligeabilité

I.1 Domination

Définition 1.1 *Nous dirons que f est dominée par g au voisinage de a si :*

- *cas où $a \in \mathbb{R}$:* $\boxed{\exists M > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tels que } \forall x \in I, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant M|g(x)|}$;
- *cas où $a = +\infty$:* $\boxed{\exists M > 0,\ \exists A > 0 \text{ tels que } \forall x \in I, x > A \Rightarrow |f(x)| \leqslant M|g(x)|}$;
- *cas où $a = -\infty$:* $\boxed{\exists M > 0,\ \exists B < 0 \text{ tels que } \forall x \in I, x < B \Rightarrow |f(x)| \leqslant M|g(x)|}$.

Attention : la constante M ne doit dépendre que des données a, f, g et surtout pas de « x » !

Proposition 1.2 *Il y a équivalence entre les énoncés :*

(i) f est dominée par g au voisinage de a ;

(ii) il existe un réel $\alpha > 0$ et une fonction $b :]a-\alpha, a+\alpha[\cap I \to \mathbb{R}$, bornée sur $]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$, tels que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I,\ f(x) = b(x)g(x)$.

Preuve : On remarque que sur un voisinage de a, on a $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) = 0$. On définit alors sur ce voisinage $b(x) = \begin{cases} f(x)/g(x) & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases}$, et on vérifie que cette fonction convient.

Corollaire 1.3 *Dans le cas où g ne s'annule pas sur I, il y a équivalence entre les énoncés :*

(i) f est dominée par g au voisinage de a ;

(ii) l'application $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Notation de Landau : si f est dominée par g au voisinage de a, nous noterons : $\boxed{f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))\,.}$

Remarques : attention, ceci n'est pas une égalité ! Cette notation signifie que f appartient à l'ensemble des fonctions dominées par g.

Proposition 1.4 *Si $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$ et $\lim\limits_{x \to a}(g(x)) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a}(f(x)) = 0$.*

Démonstration. Il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $x \in I$, si $|x-a| < \alpha$, alors $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to a}(M\,|g(x)|) = 0$, d'où le résultat (théorème d'encadrement). ⟧

I.2 Négligeabilité

Définition 1.5 *Nous dirons que f est négligeable devant g au voisinage de a si :*

– *cas où $a \in \mathbb{R}$:* $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tels que } \forall x \in I, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|}$;

– *cas où $a = +\infty$:* $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \text{ tels que } \forall x \in I, x > A \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|}$;

– *cas où $a = -\infty$:* $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0 \text{ tels que } \forall x \in I, x < B \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|}$.

Proposition 1.6 *Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a, il y a équivalence entre les énoncés :*
(i) f est négligeable devant g au voisinage de a ;
(ii) il existe un réel $\alpha > 0$ et une fonction $\varepsilon :]a-\alpha, a+\alpha[\cap I \to \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$, $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Preuve : On remarque que sur un voisinage de a, on a $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) = 0$. On définit alors sur ce voisinage $\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x)/g(x) & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases}$, et on vérifie que cette fonction convient.

Corollaire 1.7 *Dans le cas où g ne s'annule pas sur I, il y a équivalence entre les énoncés :*
(i) f est négligeable g au voisinage de a ;
(ii) l'application $\frac{f}{g}$ admet pour limite 0 en a.

Notation de Landau : si f est négligeable devant g au voisinage de a, nous noterons : $\boxed{f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))\,.}$

Remarque : attention, ceci n'est pas une égalité ! Cette notation signifie que f appartient à l'ensemble des fonctions négligeables devant g. Il conviendra donc d'être **très prudent** dans la manipulation des « o » dans les calculs....

Exemples :
1) $x^2 = \underset{x \to 0}{o}(\sin(x))$;
$[\![$ en effet, $\frac{x^2}{\sin(x)} = x \times \frac{x}{\sin(x)}$, et comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, il vient que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin(x)} = 0$. $]\!]$
2) $(1-\cos(x)) = \underset{x \to 0}{o}(x)$.
$[\![$ en effet, $\frac{1-\cos(x)}{x} = x \times \frac{1-\cos(x)}{x^2}$, et comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, il vient que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$. $]\!]$

Exemples usuels à connaître par cœur :

1) $\forall \alpha > 0$ et $\forall \beta > 0$,
 (a) $(\ln(x))^\alpha = \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^\beta\right)$;
 (b) $(|\ln(x)|)^\alpha = \underset{x \to 0^+}{o}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$;

2) si $\alpha < \beta$,
 (a) $x^\alpha = \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(x^\beta\right)$;
 (b) $x^\beta = \underset{x \to 0}{o}(x^\alpha)$;

3) $\forall \alpha > 0$, $\forall a > 1$,
 (a) $x^\alpha = \underset{x \to +\infty}{o}(a^x)$;
 (b) $a^x = \underset{x \to -\infty}{o}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$.

Proposition 1.8 *Si $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ et si g est bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x \to a}(f(x)) = 0$.*

Démonstration. Il existe un réel $\alpha > 0$ et une fonction $\varepsilon :]a-\alpha, a+\alpha[\cap I \to \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$, $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. De plus, il existe un réel $M \geqslant 0$ et un réel $\beta > 0$ tel que si $x \in]a-\beta, a+\beta[$, $|g(x)| \leqslant M$. Il en résulte qu'en posant $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, on obtient que si $x \in]a-\gamma, a+\gamma[$, alors $|f(x)| \leqslant M\varepsilon(x)$, d'où le résultat par encadrement. $]\!]$

Proposition 1.9 *Opérations et « o » :*
1. *Si $f(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$ et $g(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$, alors $(f(x) + g(x)) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$.*
2. *Si $f_1(x) = \underset{x \to a}{o}(g_1(x))$ et $f_2(x) = \underset{x \to a}{o}(g_2(x))$, alors $(f_1(x) f_2(x)) = \underset{x \to a}{o}(g_1(x) g_2(x))$.*
3. *Si $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$, alors $(f(x)) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$.*