II Relation d'équivalence

II.1 Définition

Définition 2.1 *On dit que f est* **équivalente à** g **en** a *si* $f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Écrire les traductions quantifiées de cette définition (cas $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ et $a = -\infty$.)

Proposition 2.2 *Si $f = g + h$ et si $h(x) = \underset{x\to a}{o}(g)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.*

Proposition 2.3 *Il y a équivalence entre les énoncés :*

(i) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$;

(ii) Il existe une fonction m telle que
- *au voisinage de a, $f(x) = m(x)g(x)$;*
- $\lim\limits_{x\to a} m(x) = 0$.

Preuve : Comme pour les autres relations de comparaison, on remarque que sur un voisinage de a, on a $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) = 0$. On définit alors sur ce voisinage $m(x) = \begin{cases} f(x)/g(x) & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 1 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases}$, et on vérifie que cette fonction convient.

Corollaire 2.4 *Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a, il y a équivalence entre les énoncés :*

(i) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$;

(ii) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Proposition 2.5 *La relation « $\underset{x\to a}{\sim}$ »est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a.*

Preuve : Cela résulte facilement de la proposition 2.3.

Exemples :

1. Si $P = \sum\limits_{k=p}^{n} a_k X^k$ avec $p \leqslant n \in \mathbb{N}$, $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$, alors $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ et $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $x^p - a^p \underset{x\to a}{\sim} pa^{p-1}(x-a)$.

Proposition 2.6 *On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.*

1. *Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \overline{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.*
2. *Si $g(x) \geqslant 0$ au voisinage de a, alors $f(x) \geqslant 0$ au voisinage de a.*
3. *Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de a, alors $f(x) \neq 0$ au voisinage de a.*

Preuve : cela résulte encore de 2.3 puisque si m tend vers 1 en a, alors au voisinage de a, $m(x) \geqslant 1/2 > 0$.

Remarques

1. Écrire « $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ »signifie que f s'annule sur tout un voisinage de a. C'est donc une situation très rare et généralement, une telle écriture traduit un calcul faux.
2. Lorsqu'on écrit un équivalent, seul un terme significatif à du sens : $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$, mais aussi $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + 7x$ ou encore $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + \sqrt{|x|}$.

II.2 Opérations

Proposition 2.7 *1. Si* $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ *et* $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$*, alors* $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$*.*

2. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *et si* g *ne s'annule pas au voisinage de* a*, alors* $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$*.*

Preuve : encore une fois, il suffit d'appliquer 2.3.

Remarque ATTENTION : les équivalents de s'additionnent pas !
(C'est souvent ainsi que l'on obtient un équivalent nul (et donc quasi-certainement faux).)

II.3 Obtention d'équivalents

Proposition 2.8 *Si* f *est dérivable en* a *et si* $f'(a) \neq 0$*, alors* $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$*.*

Preuve : Si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(x)}{x-a} = f'(a)$ et donc si $f'(a) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(x)}{f'(a)(x-a)} = 1$ et on applique le corollaire 2.4.

Exemples :

1. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;
2. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
3. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$;
4. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
5. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
6. $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
7. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
8. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
9. $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
10. $\mathrm{argsh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
11. $\mathrm{argth}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Dans certains cas où $f'(a) = 0$, on peut utiliser la formule de Taylor-Young. On obtient ainsi par exemple :

1. $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$;
2. $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;
3. $((1+x)^\alpha - 1 - \alpha x) \underset{x\to 0}{\sim} \alpha(\alpha-1)\dfrac{x^2}{2}$.

II.4 Substitution

En général, on ne par par composer les équivalents :
si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, il n'y a a priori aucune raison pour que $h(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} h(g(x))$.
(Sous certaines conditions, on peut cependant, dans des cas particuliers, prouver des résultats de ce genre.).

Exemples :

1. En $a = +\infty$, prendre $f : x \mapsto x+1$, $g : x \mapsto x$ et $h = \exp$;
2. En $a = 0^+$, prendre $f : x \mapsto \ln(x)$, $g : x \mapsto \ln(x) + 3$ et $h = \exp$;
3. Un exemple de condition favorable : démontrer que si $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x)) = 0$, alors $\exp(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \exp(g(x))$.

En revanche, on pourra substituer une fonction dans un équivalent :

Proposition 2.9 *Si* $\lim\limits_{t\to b} u(t) = a$ *et si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$*, alors* $f(u(t)) \underset{t\to b}{\sim} g(u(t))$*.*

Preuve : à nouveau, on utilise la proposition 2.3 et la composition des limites.

II.5 Exemples de calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)} - 1}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{(\arcsin(x))^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin(x))^{1/x}$;
4. $\lim\limits_{n\to +\infty} \left[\ln(1+e^{-n^2})\right]^{1/n}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+x)}{\arctan(x)\tan(x)}$;