FORMULES DE TAYLOR

I Formule de Taylor-Young

Le but de cette partie est de démontrer la formule de Taylor-Young, qui donne le développement limité d'une fonction f en un point a, sous certaines conditions ($n \in \mathbb{N}$, $r > 0$) :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{si } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur }]a-r;a+r[, \text{ alors} \\[1em] f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right).\end{array}}$$

I.1 Un lemme technique

Lemme I.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable au voisinage de a et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{(x-a)^n}\right) = 0$. Alors $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}}\right) = 0$.*

Démonstration : $\square$ Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{(x-a)^n}\right) = 0$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $r > \alpha > 0$, tel que $(|x-a| < \alpha) \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{x-a)^n}\right| < \epsilon$.

- Si $x \in]a-\alpha;a[$, f est continue sur $[x;a]$, dérivable sur $]x;a[$, l'Égalité des Accroissement Finis montre que : $\exists c_x \in]x;a[$ tel que $f(x)-f(a) = f'(c_x)(x-a)$.
  Et comme $|c_x - a| < |x-a| < \alpha$, donc $\left|\frac{f'(c_x)}{c_x-a)^n}\right| < \varepsilon$,
  d'où
  $$\left|\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\frac{f'(c_x)}{(x-a)^n}\right| < \left|\frac{f'(c_x)}{(c_x-a)^n}\right| < \varepsilon.$$
- Si $x \in]a;a+\alpha[$, f est continue sur $[a;x]$, dérivable sur $]a;x[$, l'Égalité des Accroissement Finis montre que : $\exists d_x \in]a;x[$ tel que $f(x)-f(a) = f'(d_x)(x-a)$.
  Et comme $|d_x - a| < |x-a| < \alpha$, donc $\left|\frac{f'(d_x)}{c_x-a)^n}\right| < \varepsilon$,
  d'où
  $$\left|\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\frac{f'(d_x)}{(x-a)^n}\right| < \left|\frac{f'(d_x)}{(d_x-a)^n}\right| < \varepsilon.$$

Dans tous les cas,
$$(|x-a\ | < \alpha) \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

On a bien démontré la limite annoncée. ⟧

I.2 Formule de Taylor-Young

Théorème I.2 (formule de Taylor-Young à l'ordre n) *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a-r, a+r[$ $(r > 0)$. Alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} \left[f(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p \right] = 0 \ ;$$

ce qui s'écrit :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + (x-a)^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \ ;$$

soit encore :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + \underset{x \to a}{o}(x-a)^n.$$

Démonstration :

Démontrons le résultat annoncé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

– $\underline{n=0}$: si on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^0$, sur $]a-r, a+r[$, alors f est continue en a, d'où $\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$, ce qui montre la propriété au rang $n = 0$.

– □ Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie jusqu'à n.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]a-r, a+r[$. Posons $F(x) = f(x) - \sum_{p=0}^{n+1} \frac{f^{(p)}}{p!}(x-a)^p$.

F est dérivable sur $]a-r, a+r[$ et

$$\forall x \in]a-r, a+r[\qquad F'(x) = f'(x) - \sum_{p=0}^{n+1} \frac{f^{(p)}}{(p-1)!}(x-a)^{p-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f'^{(k)}}{k!}(x-a)^k.$$

Mais f' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a-r, a+r[$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique et donne :

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{F'(x)}{(x-a)^n} \right) = 0,$$

d'où, d'après le lemme I.1,

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{F(x) - F(a)}{(x-a)^{n+1}} \right) = 0,$$

c'est à dire, comme $F(a) = 0$,

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} \left[f(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}}{p!}(x-a)^p \right] = 0. \quad]\!]$$

Ce théorème peut s'écrire des façons suivantes :

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $\forall a \in I$,

$-\exists\, \varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x) \\ \text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

$-\exists\, \varepsilon_0$, définie au voisinage de 0 telle que

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n \varepsilon_0(h) \\ \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon_0(h) = 0 \end{cases}$$

II Formule de Taylor-Lagrange

Donnons la formule de Taylor-Lagrange, qui en un sens généralise l'égalité des accroissements finis dans le cas de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème II.1 (formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n) *Soit $a < b$ des réels. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $(n+1)$-fois dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(b-a)^p + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration.
Remarquons que si $n = 0$, cette formule n'est pas autre chose que l'égalité des accroissements finis.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $(n+1)$-fois dérivable sur $]a, b[$.
Posons

$$A = \left[f(b) - \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(b-a)^p \right] \times \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}.$$

On a alors $f(b) = \sum\limits_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(b-a)^p + A \times \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.
Définissons la fonction auxiliaire $\varphi(x) = f(b) - \sum\limits_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(x)}{p!}(b-x)^p - A \times \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$.
φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$ donc le théorème de Rolle montre que

$$\exists\, c \in]a, b[\text{ tel que } \varphi'(c) = 0.$$

Or pour tout $x \in]a, b[$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -f'(x) - \sum_{p=1}^{n} \left[\frac{f^{(p+1)}(x)}{p!}(b-x)^p - \frac{f^{(p)}(x)}{(p-1)!}(b-x)^{p-1} \right] + \frac{(b-x)^n}{n!} \times A \\
&= -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \sum_{p=1}^{n} \frac{f^{(p)}(x)}{(p-1)!}(b-x)^{p-1} + \frac{(b-x)^n}{n!} \times A \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{(b-x)^n}{n!} \times A,
\end{aligned}$$

ce qui donne en c : $A = f^{(n+1)}(c)$, d'où le résultat. ⟧

On déduit immédiatement de ce théorème le résultat suivant :

Théorème II.2 (inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n) *Soit $a \neq b$ des réels. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est :*
- *de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$;*
- *et si $\exists M > 0$ tel que $\forall t \in [a, b]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$,*

alors

$$\left| f(b) - \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(b-a)^p \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

III Applications

III.1 Calculs de limites de suites, développement limités

Proposition III.1 (développement limité de l'exponentielle) *Pour tout réel x,*

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Démonstration.
☐ Soit $x \in \mathbb{R}$.
Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à exp à l'ordre n sur $[0, x]$: exp est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$ et $\forall t \in [0, x]$, $|\exp^{(n+1)}(t)| = |\exp(t)| \leq M = \max(\exp(x), 1)$. D'où :

$$\left|\exp(x) - \sum_{p=0}^{n}\frac{\exp^{(p)}(0)}{p!}(x-0)^p\right| \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

soit

$$\left|e^x - \sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}\right| \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puis on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$. ☐ ⟧

Dès qu'une fonction est suffisamment dérivable et que l'on connaît ses dérivées successives, la formule de Taylor-Young donne le développement limité de la fonction en un point. Démontrez ainsi la proposition suivante (résultat usuel à connaître) :

Proposition III.2 *Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + x^n\varepsilon(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

En guise d'entraînement, retrouver les développements limités usuels suivants :
(dans toutes les égalités suivantes, $n \in \mathbb{N}$ et ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$)

$$\boxed{\begin{array}{lclcl}
\sin(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) & = & x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\cos(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + x^{2n+1}\varepsilon(x) & = & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\ln(1+x) & = & \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + x^n\varepsilon(x) & = & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n}x^n + x^n\varepsilon(x) \\
\exp(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + x^n\varepsilon(x) & = & 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)
\end{array}}$$

Exercice : à l'aide de la formule de Taylor-Young, à un ordre bien choisi, calculer les développements limités suivants :

1. $\tan(x)$ à l'ordre 2 en 0 ;
2. $\arctan(x)$ à l'ordre 2 en 0 ;
3. $\arcsin(x)$ à l'ordre 2 en 0 ;
4. $\operatorname{argsh}(x)$ à l'ordre 2 en 0 ;
5. $\operatorname{argth}(x)$ à l'ordre 2 en 0 ;

III.2 Méthode de Newton

Supposons que nous soyons dans la situation suivante : f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ (a<b) telle que

$$\begin{cases} \bullet \quad f(a)f(b) < 0 \ ; \\ \bullet \quad \forall x \in [a,b], \quad |f'(x)| \geq m > 0 \ ; \\ \bullet \quad \forall x \in [a,b], \quad |f''(x)| \leq M. \end{cases}$$

Proposition III.3 *f possède un unique zéro sur $]a,b[$. Notons α ce zéro.*

Démonstration :
L'existence résulte du théorème des valeurs intermédiaires appliqués à f sur $[a,b]$.
L'unicité vient du fait que comme f' ne s'annule pas et est continue sur $[a,b]$, elle garde un signe constant donc f est strictement monotone sur $[a,b]$ et par suite injective.]]

Proposition III.4 *Une valeur approchée du zéro α est donnée par l'abscisse s de l'intersection de la tangente en $M(a,f(a))$ à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f avec l'axe Ox, soit*

$$s = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

De plus, une majoration de l'erreur commise est :

$$|\alpha - s| \leq \frac{M}{2m}(b-a)^2.$$

Démonstration :
L'équation de la tangente en $M(a,f(a))$ à la courbe $\mathcal{C}$ est :

$$\tau_a \mid y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Par suite, $0 = f(a) + f'(a)(s-a)$ donc $s = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

Majorons l'erreur :

$$|\alpha - s| = \left| \ \alpha - a + \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = \frac{|f'(a)(\alpha - a) + f(a)|}{|f'(a)|},$$

or l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 2 en a montre que

$$|f(\alpha) - f(a) - f'(a)(\alpha - a)| \leq \frac{M}{2} \ |\alpha - a|^2 \leq \frac{M}{2} \ (b-a)^2,$$

d'où, comme $f(\alpha) = 0$ et que $|f'(a)| \geq m > 0$:

$$|\alpha - s| \leq \frac{M}{2m}(b-a)^2. \quad]]$$

Remarque : cette méthode est d'autant plus précise que M est petit et que m est grand. C'est à dire que la dérivée doit être grande en valeur absolue et la dérivée seconde faible (i.e. la courbe doit le plus possible ressembler à une droite de pente la plus grande possible).

Exemples : appliquer cette méthode (donner une majoration de l'erreur !) aux zéros des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sin(x)$ sur $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$;
2. $f(x) = \ln(x)$ sur $[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}]$;
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{3}$ sur $[0, \frac{1}{2}]$.