Pour étudier une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et représenter graphiquement sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan :

1. Déterminer le domaine de f, puis restreindre si possibles les intervalles d'étude en utilisant la parité et la périodicité éventuelles de f. Ainsi, l'étude est ramenée à un ou plusieurs intervalles disjoints. Déterminer les limites aux bornes.

2. Calculer $f'(x)$ là où les théorèmes de calculs s'appliquent. Étudier le signe de la dérivée f'. Lorsque ce signe n'est pas évident, penser à essayer d'écrire $f'(x)$ sous la forme d'un produit $f(x) = g(x)h(x)$, le signe de $h(x)$ étant connu. Chercher ensuite celui de g en faisant par exemple un tableau de variations de g.

   Une dérivée infinie à droite ou à gauche en un point du domaine de f fournit en ce point une tangente parallèle à (Oy).

3. Construire le tableau des variations de f, et si ce tableau montre que f s'annule, chercher le(s) point(s) où f s'annule (éventuellement par valeurs approchées : encadrement).

4. Si $a \in \mathbb{R}$ et si $f(x)$ admet pour limite $\pm\infty$ quand x tend vers a^+ (*resp.* a^-), la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ quand x tend vers a^+ (*resp.* a^-.

5. Dans le cas où $f(x)$ admet pour limite $\pm\infty$ quand $x \to \pm\infty$, étudier la branche infinie correspondante.

   Pour cela, étudier la limite éventuelle λ de $\frac{f(x)}{x}$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

   (a) si $\lambda = 0$, il s'agit d'une branche parabolique dans la direction de (Ox) ;

   (b) si $\lambda = \pm\infty$, il s'agit d'une branche parabolique dans la direction de (Oy) ;

   (c) si λ est finie et non nulle, chercher une éventuelle droite asymptote ($y = \lambda x + b$) en faisant un développement limité de $f(x) - (\lambda x + b)$ à l'ordre 1 à l'infini. Remarquer que cela donne également la position de f par rapport à l'asymptote.

6. Si $a \in \mathbb{R}$ et si f n'est pas définie en a mais admet une limite finie $b \in \mathbb{R}$ quand $x \to a^+$ (*resp.* a^-), prolonger f à droite (*resp.* à gauche) en a par $f(a) = b$ et étudier la dérivabilité éventuelle en a de la fonction prolongement.

7. Quand la fonction s'y prête (par exemple si le signe de $f''(x)$ est facile à déterminer), indiquer la convexité éventuelle de la fonction, ainsi que les points de changement de convexité.

8. Tracer le représentation graphique de f, en mettant en évidence les particularités de f examinées dans l'étude précédente.

Exercice 1 Faire l'étude des fonctions suivantes :

$$\left|\begin{array}{lllll} 1) & f & : & x \mapsto & f(x) = \frac{x^2-2x-1}{x} \times e^{-\frac{1}{x}} \quad ; \\ 2) & g & : & x \mapsto & g(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2} \quad ; \\ 3) & h & : & x \mapsto & h(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)} \quad . \end{array}\right.$$