

Les 4 exercices sont indépendants les uns des autres

Exercice 1

Soient E un ensemble, A, B, C des parties de E .

Démontrer (attention à la rigueur de la rédaction) les résultats suivants.

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

2. Il y a équivalence entre les énoncés :

(i) $A \cap B = A \cap C$;

(ii) $A \cap C_E(B) = A \cap C_E(C)$.

3. Si $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$, alors $B \subset C$.

C'est à dire : $(A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C) \implies (B \subset C)$.

Exercice 2 Résoudre :

1. $\cos(x) - \cos(3x) = 0$;

2. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \leq \sin(x)$.

Penser à utiliser la fonction tan.

Exercice 3

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel x , on a

$$\frac{x-1}{2x} \in [0, 1[.$$

2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\tan^2(\theta)$.

4. Supposons maintenant que $\theta \in [0, \pi[$ et que x est un réel tel que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$.

Calculer $\tan(\theta)$ en fonction de x .

Penser à utiliser les questions précédentes! Attention, des distinctions de cas seront nécessaires pour traiter rigoureusement ce calcul.

Exercice 4 (Plus difficile) Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

1. Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?

2. Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?