Ceci est le texte du DS n°1 de l'an dernier.
Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

Les quatre exercices sont indépendants. L'énoncé contient 2 pages.

Exercice 1 Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E.
Rappelons que $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

1. Démontrer que
$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C.$$
A-t-on la même égalité avec $\cup$ à la place de $\cap$?
2. Démontrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
   (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;
   (ii) $A \subset C$.

Exercice 2

1. Exprimer, pour tout réel x, $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation
$$4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Exercice 3 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On rappelle que $j = e^{i2\pi/3}$.
Démontrer l'équivalence entre les énoncés :
(i) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$;
(ii) une racine de $az^2 + bz + c = 0$ est j ou j^2 ;
(iii) $|a - c| = |c - b| = |b - a|$.

Exercice 4 Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 *Soient s et p sont deux nombres complexes, p non nul et (E) l'équation $z^2 - sz + p = 0$, d'inconnue z.*

(T1) Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) (E) admet deux racines de même argument ;
(ii) $\left|s^2 - 4p\right| = |s|^2 - 4|p|$.

(T2) Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) (E) admet deux racines de même module ;
(ii) $\left|s^2 - 4p\right| = 4|p| - |s|^2$.

Soient donc s et p deux nombres complexes, $p \neq 0$ et (E) l'équation $z^2 - sz + p = 0$. Notons z_1 et z_2 les racines de (E), et nous noterons, lorsque cela a un sens, r_1 et r_2 leurs modules respectifs ainsi que θ_1 et θ_2 leurs arguments principaux respectifs.

1. (a) Exprimer s et p en fonction de z_1 et z_2. En déduire que $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$.
   (b) On note, pour le reste de l'exercice $u = \dfrac{z_2}{z_1}$. Traduire, en fonction de u, les propriétés : « (E) admet deux racines de même module » et « (E) admet deux racines de même argument » .
   (c) Exprimer $s^2 - 4p$ en fonction de z_1 et z_2.
   (a) Dans le cas où $|z_1| = |z_2| = r$, montrer que $\left|s^2 - 4p\right| = 4|p| - |s|^2$.
   (b) Dans le cas où $\operatorname{Arg}(z_1) = \operatorname{Arg}(z_2) = \theta$, montrer que $\left|s^2 - 4p\right| = |s|^2 - 4|p|$.
2. Démontrer le

   Lemme 2 *Soient a et b deux nombres complexes, $b \neq 0$, tels que $|a| = |a - b| + |b|$.*
   Alors il existe un réel $\alpha \geqslant 1$ tel que $a = \alpha b$.
3. On suppose pour cette question que $\left|s^2 - 4p\right| = 4|p| - |s|^2$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel β tel que $0 \leqslant \beta \leqslant 4$ et $s^2 = \beta p$.
   (b) En déduire que u est solution de l'équation $(1 + u)^2 = \beta u$.
   (c) Démontrer que $|u| = 1$.
4. On suppose pour cette question que $\left|s^2 - 4p\right| = |s|^2 - 4|p|$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel β tel que $\beta \geqslant 4$ et $s^2 = \beta p$.
   (b) En déduire que u est solution de l'équation $(1 + u)^2 = \beta u$.
   (c) Démontrer que u est un nombre réel.
5. En rassemblant les différents résultats, démontrer le théorème 1.