Problème

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) \quad xy'' - y' - 4x^3y = x^3 \operatorname{sh}(x^2).$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E), (E_0) l'équation homogène associée à (E) et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0). On notera D le domaine sur lequel on résout (E) (non déterminé explicitement pour le moment).

P.1 Propriétés générales

1. Démontrer que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$.
2. On suppose connue $f \in \mathcal{S}$. Exprimer $\mathcal{S}$ en fonction de $\mathcal{S}_0$ et de f. On démontrera ce résultat.

P.2 Une étude de fonction

Dans toute la suite du problème, a est l'application définie dans cette partie.

1. Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de $a : x \mapsto \operatorname{ch}(x^2)$.
2. Justifier que sur ce domaine a est deux fois dérivable et calculer a''.
3. Tracer *(grossièrement, sans outils : l'allure me suffit)* le graphe représentatif de a.
4. Déterminer l'intervalle réel maximal I sur lequel a définie une bijection. *(s'il y a plusieurs choix, on prendre l'intervalle contenant des réels positifs et si possible 0.)*
5. On note φ la restriction de a à l'intervalle I. Donner une expression explicite de φ^{-1}, déterminer le domaine de dérivabilité et donner une expression de la dérivée de φ^{-1}.
6. Tracer le graphe représentatif de φ^{-1}. Représenter le graphe de a sur ce nouveau dessin et expliquer le lien entre les deux courbes.

P.3 Calcul de dérivées de quelques fonctions

Dans toute la suite du problème, b, c et d sont les applications définies dans cette partie.

1. Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de $b : x \mapsto \operatorname{sh}(x^2)$.
   Justifier que sur ce domaine b est deux fois dérivable et calculer b''.
2. Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions :
   (a) $c : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\left(\operatorname{ch}(x^2)\right)^2}{x}\right)$;
   (b) $d : x \mapsto \operatorname{th}(x^2)$.

P.4 Résolution de (E) en se ramenant à une équation d'ordre un

1. Démontrer que $a \in \mathcal{S}_0$.

   On va s'inspirer de la méthode de la variation de la constante et chercher des solutions de (E) sous la forme $f(x) = \lambda(x)a(x)$.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Justifier l'existence d'une application λ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda(x)a(x)$.
   (b) Justifier que f est deux fois dérivable si et seulement si λ l'est.
3. Soit $f \in \mathcal{D}^2(D,\mathbb{R})$. Démontrer l'équivalence entre les énoncés :
   (i) $f \in \mathcal{S}$;
   (ii) λ' est solution de l'équation différentielle
   $(F)\ x \operatorname{ch}\left(x^2\right) y' + \left(4x^2 \operatorname{sh}(x^2) - \operatorname{ch}(x^2)\right) y = x^3 \operatorname{sh}\left(x^2\right)$.
4. Résoudre l'équation différentielle (F). On prendra soin de préciser le domaine de résolution.
5. En déduire $\mathcal{S}$.

P.5 Résolution de (E) par variations *DES* constantes

1. Vérifier que $b \in \mathcal{S}_0$. En déduire que $\{ x \mapsto \lambda a(x) + \mu b(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{S}_0$, le domaine de définition étant $D = \mathbb{R}$.

   On admet que $\mathcal{S}_0 = \{ x \mapsto \lambda a(x) + \mu b(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
   (ceci a en fait été démontré dans la partie précédente, en prenant un second membre nul au lieu de x^3 sh$\left(x^2\right)$.)

   Comme pour la méthode de variation de la constante dans le cas d'une équation d'ordre 1, on va chercher une solution de (E) sous la forme $f(x) = \lambda(x)a(x) + \mu(x)b(x)$, les fonctions λ et μ étant dérivables.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire pourquoi il est intéressant de poser comme première condition sur λ et μ l'équation suivante :
$$(C1) \quad \lambda'(x)a(x) + \mu'(x)b(x) = 0.$$
3. Supposant $(C1)$ vérifier, calculer $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire que si f appartient à $\mathcal{S}$, alors λ et μ vérifient également l'équation
$$(C2) \quad \lambda'(x)a'(x) + \mu'(x)b'(x) = x^2 \operatorname{sh}(x^2).$$
4. Résoudre le système constitué par les équations $(C1)$ et $(C2)$, dont les variables sont $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$. Donner la valeur explicite de $\lambda'(x)$ et de $\mu'(x)$ pour tout réel x.
5. Déterminer des fonctions λ et μ qui conviennent.
6. En déduire f et vérifier que $f \in \mathcal{S}$.
7. Conclure : donner l'ensemble $\mathcal{S}$.
   Vérifier que le résultat est le même que celui obtenu en 5