Ceci est le devoir donné en 2011/2012 le vendredi 14 octobre 2011

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

Les trois exercices et le problème sont indépendants. L'énoncé contient 2 pages.

Exercice 1

1. Soient a et b des réels strictement positifs. Démontrer que
$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$
2. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)\right).$$

Exercice 2 Pour tout entier naturel n, on pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\binom{2n+2}{n+1} = 2\binom{2n+1}{n+1}$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{2}S_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit $\varphi : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ et $\psi : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

1. Montrer que φ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée.
2. Montrer que ψ est dérivable sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$ et donner l'expression de sa dérivée.
3. En déduire une relation entre $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ en tout réel x où ces fonctions sont définies.

Problème Sur la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

Le but de ce problème est la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, d'ordre supérieur à deux en se ramenant à la résolution de systèmes d'équations d'ordre 1.

Partie 1 Un aperçu de la méthode sur une équation de degré 2

On va dans cette section s'intéresser à l'équation

$$(E) \quad y''(t) - (3+i)y'(t) + (2+2i)y(t) = e^{2t},$$

d'inconnue la fonction y à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Résoudre (E) par la méthode vue en cours.
2. Nous allons voir une seconde méthode : pour cela, notons r_1 et r_2 les deux racines du polynôme $X^2-(3+i)X+(2+2i)$. On pose le système différentiel
$$(SE)\left\{\begin{array}{llcl} (E1) & z'(t) - r_1 z(t) & = & e^{2t}\,; \\ (E2) & y'(t) - r_2 y(t) & = & z(t). \end{array}\right.$$
   (a) Résoudre $(E1)$ d'inconnue la fonction z.
   (b) Résoudre $(E2)$ d'inconnue la fonction y et vérifier que ces solutions correspondent bien à celles obtenues en 1.

Partie 2 Une première équation de degré 3

En s'inspirant de la méthode décrite dans la section précédente et en l'adaptant à l'ordre 3, on va résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 3

$$(F) \quad y'''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0,$$

d'inconnue la fonction y à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notons P le polynôme $P(X) = X^3 - 3X + 2$.

1. Déterminer les racines r_1, r_2 et r_3 (non nécessairement distinctes) de P.
2. Résoudre le système différentiel
$$(SF)\left\{\begin{array}{llcl} (F1) & z'(t) - r_1 z(t) & = & 0\,; \\ (F2) & w'(t) - r_2 w(t) & = & z(t)\,; \\ (F3) & y'(t) - r_3 y(t) & = & w(t). \end{array}\right.$$
3. En déduire l'inclusion d'un ensemble dans l'ensemble $\mathcal{S}_F$ des solutions de (F). Nous admettrons qu'un argument de dimension d'espace vectoriel permet de conclure à l'égalité.

Partie 3 Une deuxième équation de degré 3

En s'inspirant de la méthode décrite dans la section précédente, résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 3

$$(G) \quad y'''(t) + 3y''(t) + 4y'(t) + 2y(t) = 0.$$

1. D'abord dans le cas d'une inconnue y à valeurs dans $\mathbb{C}$.
2. Puis dans celui où y est à valeurs dans $\mathbb{R}$.