

**Exercice 1**

Dans un plan  $\mathcal{P}$  de l'espace, considérons un cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$ . Soit  $\Delta$  la droite passant par  $A$  orthogonale à  $\mathcal{P}$  et  $S$  un point de  $\Delta$  distinct de  $A$ . Notons  $I$  le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $(BS)$ .

Pour tout point  $M$  du cercle  $\mathcal{C}$ , notons  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $(MS)$ .

- Placer les données précédentes sur une figure,  $\Delta$  étant placée verticalement.
- Prouver que  $H$  appartient à la sphère  $\Sigma$  de diamètre  $[AS]$ .
- Dans cette question, supposons que  $M$  est distinct de  $A$  et de  $B$ .  
Prouver que la droite  $(MB)$  est orthogonale au plan  $(AMS)$ .  
En déduire que la droite  $(AH)$  est orthogonale au plan  $(BMS)$ .
- Montrer que  $H$  appartient au plan  $\Pi$  passant par  $I$  et orthogonal à la droite  $(BS)$ .
- (a) Déterminer l'intersection  $\Gamma$  de la sphère  $\Sigma$  et du plan  $\Pi$ .  
(b) Prouver que l'ensemble décrit par  $H$  lorsque  $M$  parcourt  $\mathcal{C}$  est égal à  $\Gamma$ . A cet effet, étant donné un point  $N'$  de  $\Gamma$  distinct de  $A$ , on pourra montrer que le plan  $(AN'S)$  coupe le cercle  $\mathcal{C}$  en  $A$  et en un autre point  $M$ .

**Exercice 2** Désignons par  $E$  l'ensemble des triplets  $(x, y, z)$  de réels non nuls vérifiant  $x + y + z = 0$ .

Dans un plan affine euclidien  $\mathcal{P}$ , soient  $A, B$  et  $C$  des points non alignés, et notons  $O$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $(ABC)$  (*Rappelons que c'est le cercle passant par  $A, B$  et  $C$* ).

Soit  $(x, y, z) \in E$ .

- Montrer que chacun des ensembles de points pondérés  $\{(B, y), (C, z)\}$ ,  $\{(A, x), (C, z)\}$  et  $\{(A, x), (B, y)\}$  possède un barycentre.  
Dans la suite, ces trois seront notés respectivement  $I, J$  et  $K$ .
- (a) Montrer qu'il existe un vecteur  $\vec{v}$  non nul, tel que, pour tout point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$ , nous ayons :

$$x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{v}.$$

(Exprimer  $\vec{v}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .)

- (b) Montrer que  $\vec{v}$  n'est colinéaire à aucun des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .  
(c) Montrer que chacun des vecteurs  $\overrightarrow{AI}$ ,  $\overrightarrow{BJ}$  et  $\overrightarrow{CK}$  est non nul et colinéaire à  $\vec{v}$ .
- (a) Montrer que, pour tout point  $M$  de  $\mathcal{P}$ , on a :

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v}.$$

- (b) En déduire que le lieu géométrique des points  $M$  de  $\mathcal{P}$  vérifiant  $xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = 0$  est la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $O$  et orthogonale à chacune des droites  $(AI)$ ,  $(BJ)$  et  $(CK)$

Dans la suite, on dira que  $\mathcal{D}$  est la droite associée au triplet :

$$\{(A, x), (B, y), (C, z)\}.$$

- (c) *Application* : Construire la droite  $\mathcal{D}$  associée à :

$$\{(A, -3), (B, 1), (C, 2)\}.$$

- Soit  $\Delta$  une droite passant par  $O$ , distincte de chacune des médiatrices du triangle  $ABC$ . Montrer que l'on peut trouver un triplet  $(x_0, y_0, z_0)$  de  $E$  tel que  $\Delta$  soit la droite associée à  $\{(A, x_0), (B, y_0), (C, z_0)\}$ .

## Problème

### I Un résultat classique

Démontrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n = \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

Écrire une procédure `>c :=proc(n)` dont la variable est  $n$  et qui calcule  $C_n$  :

- en utilisant une boucle `for` ;
- en utilisant une procédure récursive.

### II Choisir des maisons...

On se propose de répondre à la question suivante :

« de combien de façons peut-on choisir quatre maisons dans une rangée de douze, si l'on s'interdit de prendre deux maisons contiguës (c'est à dire à côté l'une de l'autre) ? » .

Soient  $n$  et  $k$  deux naturels non nuls. On note  $F(n, k)$  le nombre de façons de choisir  $k$  maisons dans une rangée de  $n$ , de telle manière que deux maisons ne soient pas contiguës.

Pour faciliter la compréhension, on supposera que les maisons sont numérotées consécutivement de 1 à  $n$ .

Pour les 3 premières questions, on ne demande qu'une justification « intuitive » . Les autres questions devront être dûment démontrées.

1. Que vaut  $F(n, 1)$  ?
2. Montrer que  $F(n, k) = 0$  si  $n < 2k - 1$ .
3. Combien vaut  $F(2k - 1, k)$  ?
4. Démontrer que pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ ,  $F(n + 2, k + 1) = F(n, k) + F(n + 1, k + 1)$ .
5. Dresser un tableau donnant la valeur de  $F(n, k)$  pour  $1 \leq n \leq 12$  et  $1 \leq k \leq 4$ .  
(On utilisera  $k$  comme indice de ligne et  $n$  comme indice de colonne).
6. Répondre à la question du préambule.
7. (a) En utilisant 1 et 4, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F(n + 1, 2) = F(n, 2) + (n - 1)$ .  
(b) Démontrer alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F(n, 2) = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}$ .
8. (a) Démontrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $F(n, 3) = \sum_{k=0}^{n-2} F(k, 2)$ .  
(b) En déduire que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ ,  $F(n, 3) = \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k(k + 1)}{2}$ .  
(c) En déduire une expression simple de  $F(n, 3)$ .
9. Démontrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :  
$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket F(n + 1, k + 1) = \sum_{i=2k-1}^{n-1} F(i, k).$$
10. En déduire une formule donnant  $F(n, 4)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Vérifier que l'on retrouve la valeur de  $F(12, 4)$  calculé à la question 6.
11. Écrire une procédure récursive `>F :=proc(n,k)` de variable  $n$  et  $k$  qui calcule la valeur de  $F(n, k)$ .