Ceci est le texte du devoir surveillé n°4 (2h) du 18 novembre 2011

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

Les trois exercices sont indépendants. L'énoncé contient 1 page.

Exercice I

1. Faire une étude complète (aboutissant au tracé) de l'arc paramétré Γ défini par

$$M(t) \begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2 - 1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t - 1}. \end{cases}$$

2. On veut déterminer le point double. On se donne deux paramètres $u \neq t$ tels que $M(u) = M(t)$.
 - (a) On pose $P = ut$ et $S = u + t$.
Déterminer les valeurs de P et de S .
 - (b) En déduire le point double.
 - (c) Démontrer qu'en ce point, les tangentes à la courbe sont perpendiculaires.

Exercice II

1. Faire une étude complète (aboutissant au tracé) de l'arc paramétré Γ de représentation polaire

$$r(\theta) = \cos^2(\theta).$$

2. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la tangente est horizontale.

Exercice III

Soit $(G, \times)$ un groupe de neutre e_G . (Si $(x, y) \in G^2$, on pourra noter xy pour $x \times y$.)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, un élément x de G est dit *d'ordre n* si $x^n = e_G$ et si pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p < n$, $x^p \neq e_G$.

On dit qu'un élément x de G est *d'ordre fini* s'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que x est d'ordre n .

On rappelle que dans un groupe, pour tout $x \in G$, $x^0 = e_G$.

1. On note $Z(G)$ le centre de G , c'est-à-dire $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, x \times y = y \times x\}$.
Démontrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G, \times)$.
2. On suppose que G possède un unique élément a d'ordre 2. Montrer que $a \in Z(G)$.
3. Soit b un élément de G d'ordre $n > 1$.
Démontrer que $\{k \in \mathbb{Z} \mid b^k = e_G\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et déterminer ce sous-groupe.
4. On suppose dorénavant que G est abélien.
Démontrer que l'ensemble des éléments de G d'ordre fini est un sous-groupe de $(G, \times)$.
5. Déterminer ce sous-groupe des éléments d'ordre fini dans le cas de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
Le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ admet-il des éléments de tout ordre possible? Admet-il des éléments qui ne sont pas d'ordre fini?

Ceci est le texte du DS n°5 (1h15) du 2 décembre 2011

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre. Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

L'énoncé contient 1 page.

Problème Indicatrice d'Euler

Les deux premières parties sont indépendantes, la troisième utilise les résultats des deux autres.

Pour tout entier naturel $n > 0$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n et premiers avec n :

$$\varphi(n) = \text{Card}(\{k \in \mathbb{N}^* \mid k \leq n \text{ et } k \wedge n = 1\}).$$

Partie I Premiers résultats

Dans cette partie, on ne demande que des justifications rapides des résultats.

- Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(6)$ et $\varphi(8)$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrer l'équivalence entre les énoncés :
 - p est un nombre premier ;
 - $\varphi(p) = p - 1$.
- Soient p et q deux nombres premiers distincts. Calculer $\varphi(pq)$.
- Soient p un nombre premier et k un entier naturel. Calculer $\varphi(p^k)$.

Partie II Théorème chinois

Dans toute cette partie, m et n sont deux entiers naturels tels que $m \wedge n = 1$.

- Soient a et b des entiers relatifs. On s'intéresse au système de congruences

$$(E) \quad \begin{cases} x \equiv a [m] \\ x \equiv b [n]. \end{cases}$$

- Justifier l'existence d'entiers relatifs λ et μ tels que $\lambda m + \mu n = 1$. On pose $c = a\mu n + b\lambda m$.
- Démontrer que les solutions x de (E) sont les entiers relatifs tels que $x \equiv c [mn]$.
- Application : résoudre le système

$$(E) \quad \begin{cases} x \equiv 4 [7] \\ x \equiv 3 [10]. \end{cases}$$

Remarque : on détaillera l'algorithme permettant d'obtenir les coefficients de Bezout de 10 et 7.

- [hors barème] Dédurre de la question 1 un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Partie III Retour à l'indicatrice d'Euler

- Reprenons les notations de la question 1 de la partie II. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 - c est premier avec mn ;
 - a est premier avec m et b est premier avec n .
 - Démontrer que si u et v sont premiers entre eux, alors $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, de décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{k=1}^N p_k^{\alpha_k}$. Démontrer que l'on a $\varphi(n) = n \prod_{k=1}^N \frac{p_k - 1}{p_k}$.
- Calculer $\varphi(1260)$.
- Démontrer l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers naturels (x_n) telle que $\left(\frac{\varphi(x_n)}{x_n}\right)$ converge vers 1.
- Aurait-on pu prendre $x_n = n$ dans la question précédente ?