Quelques propriétés classiques des suites réelles

Exercice 1 (Moyenne de Cesaro)**.** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombre réels.

On définit la suite $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (moyenne de Cesaro de u) par : $c_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Démontrer que si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors c converge vers ℓ.

2. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Exercice 2 (limsup et liminf d'une suite)**.** Soit $x = (x_n)$ une suite réelle bornée. Pour tout entier naturel n, on définit $y_n = \sup(\{x_p \mid p \geqslant n\})$ et $z_n = \inf(\{x_p \mid p \geqslant n\})$.

1. Justifier l'existence des suites (y_n) et (z_n).
2. Démontrer que ces deux suites sont convergentes.
3. Démontrer que x converge si et seulement si $\lim y_n = \lim z_n$.
4. Que peut-on dire si la suite x n'est pas supposée bornée.

Exercice 3 (suite entière)**.** Soit $u = (u_n)$ une suite convergente à valeurs entières ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$).

1. Démontrer que la limite de u est entière.
2. Démontrer que la suite u est stationnaire.

Exercice 4 (valeurs d'adhérences d'une suite)**.** Soit $x = (x_n)$ une suite réelle. On appelle valeur d'adhérence de x toute limite réelle d'une suite extraite de x.

1. Trouver un exemple qui pour montre qu'une suite n'a pas nécessairement de valeur d'adhérence.
2. On suppose la suite x bornée.
   (a) Justifier qu'elle possède une valeur d'adhérence.
   (b) Démontrer que x converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence.
3. Une application : on suppose que $x = (x_n)$ est une suite réelle bornée telle que $\lim e^{2ix_n} = 1$ et $\lim e^{i\sqrt{2}x_n} = 1$.
   Démontrer que x converge vers 0.

Exercice 5 ($\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable)**.**

1. Développement décimal illimité.
   (a) Soit $x \in [0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, rappeler la définition de la valeur approchée décimale d_n de x à 10^{-n} près par défaut. Justifier l'écriture pour tout n $d_n = E(x) + 0,a_1a_2...a_n$, avec $a_1, \cdots, a_n \in [\![0,9]\!]$.
   Démontrer la convergence de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, justifier la définition : $0,a_1a_2...a_n...$ est le **développement décimal illimité de** x, ainsi que son unicité.
   (b) Toute écriture (infinie) $0,a_1a_2...a_n...$ est-elle un développement décimal illimité d'un nombre réel ?
   (c) Soit une suite d'entiers $(a_n)_{n\geqslant 1}$ non tous nuls telle que $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \exists p \geqslant n_0, a_p \neq 9$.
   Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_0 = 0$ et $d_n = 0,a_1a_2...a_n$ converge vers un réel $x \in [0,1]$ et que pour tout entier n, d_n est la valeur approchée décimale de x par défaut à 10^{-n} près : et donc que $0,a_1a_2...a_n...$ est bien le développement décimal illimité de x.
2. Application : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
   (a) Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $]0,1[$. Notons pour tout i, $x_i = f(i)$, alors $f(\mathbb{N}) = \{x_i / i \in \mathbb{N}\}$. Pour tout entier naturel i, on a le développement décimal illimité : $x_i = 0,a_{i1}a_{i2}...a_{in}...$. Construire $x \in]0,1[$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}, x \neq x_i$.
   (b) En déduire qu"il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $]0,1[$. On dira que $]0,1[$ n'est pas **dénombrable**.
   (c) Démontrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.