Devoir en temps libre n°12

Les deux exercices et le problème sont indépendants les uns des autres. La dernière partie du problème n'est pas à faire.

Exercice I

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on définit le polynôme $P_n = X^3 + \frac{1}{n}X - 1$.

1. P_n peut-il avoir des racines multiples ?
2. Démontrer que P_n possède exactement une racine réelle notée x_n. Justifier que $x_n \in [0;1]$.
3. Calculer $P_n(1 - 1/n) \leqslant 0$ et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.
4. Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = 1 - x_n$. A l'aide de la relation $P_n(x_n) = 0$, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$.
5. Justifier que P_n admet deux racines complexes y_n et z_n, non réelles.
   Quelle relation existe-t-il entre y_n et z_n ?
6. On note y_n la racine complexe de P_n dont la partie imaginaire est strictement positive.
   (a) Donner les relations entre les racines x_n, y_n et z_n et les coefficients de P_n.
   (b) Déterminer y_n et z_n en fonction de x_n.
   (c) En déduire les limites de y_n et z_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice II

On définit les applications suivantes :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1), P''(1)) \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(0), P(-1)) \end{array}$$

1. Démontrer que g est une application linéaire. Nous admettrons qu'il en est de même pour h.
2. Exprimer $\ker(g)$ sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré : $\ker(g) = \mathrm{Vect}(\cdots)$.
3. Exprimer $\ker(h)$ sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré : $\ker(h) = \mathrm{Vect}(\cdots)$.
4. Déterminer $\ker(g) \cap \ker(h)$. En déduire l'ensemble des polynômes P de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant les relations
$$P(1) = P'(1) = P''(1) = P(1) = P(0) = P(-1) = 0.$$
5. Résoudre l'équation linéaire $h(P) = (1, 0, -1)$, d'inconnue $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Problème

On notera $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

I L'opérateur de différence finie Δ

On définit l'opérateur de différence finie $\Delta : E \to E$ par : pour tout $f \in E$, $\Delta(f)$: $\begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \to \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x). \end{cases}$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E vers E.
2. Déterminer $\ker \Delta$.
3. On notera comme d'habitude, pour $k \geqslant 0$, Δ^k l'application obtenue en composant Δ k-fois *(i.e.* $\Delta^{k+1} = \Delta \circ \Delta^k$*)*.
   Montrer que pour tout $f \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\Delta^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k).$$

Devoir en temps libre n°12

II Action de Δ sur les polynômes

On s'intéresse dans cette partie à l'action de Δ sur $\mathbb{R}[X]$. Par abus de langage, nous noterons encore Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Déterminer ker Δ.
3. a) Pour P de degré supérieur ou égal à 1, calculer le degré et le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de ceux de P.
   b) Si P est de degré n, déterminer $\Delta^n(P)$.
   c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(\mathbb{R}_p[X]) \subset \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
   d) Démontrer que $\Delta(\mathbb{R}_2[X]) = \mathbb{R}_1[X]$.
   On admettra que ce résultat est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:$\Delta(\mathbb{R}_p[X]) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
   e) En déduire $\operatorname{Im}\Delta$.
4. On définit : $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = 0\}$.
   a) Montrer que Δ réalise un isomorphisme de F sur $\operatorname{Im}\Delta$.
   b) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ vérifiant les relations
   $$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(P_n) = P_{n-1}, \text{ et } P_n(0) = 0. \end{cases}$$
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
   d) Montrer que la famille $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ constitue une base de $\mathbb{R}[X]$.
   e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer pour $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^k(P_n)$.
   f) Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ se décompose sous la forme
   $$P = \sum_{n=0}^{p} \lambda_n P_n,$$
   avec $\lambda_n = (\Delta^n(P))(0)$ et p un entier que l'on déterminera.

III Polynômes binomiaux

On définit les polynômes binomiaux de la manière suivante :
pour tout $k \geqslant 1$, $B_k(X) = \binom{X}{k} = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$; et $B_0(X) = \binom{X}{0} = 1$.

1. Montrer que les polynômes binomiaux coïncident avec les polynômes (P_n) obtenus ci-dessus, c'est-à-dire :
   pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \binom{X}{n}$.
2. Déduire de la question **??** que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
   $$P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k(P))(a) \binom{X}{k}.$$
   Remarquons que cette formule peut être considérée comme l'analogue discrète de la formule de Taylor : $P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\dfrac{X^k}{k!}$ *(l'opérateur de différence finie est l'analogue discret de la dérivée).*
3. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On cherche à calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} Q(k)$ (analogue discret de l'intégration).
   a) Trouver $W \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(W) = Q$.
   b) Exprimer S_n en fonction de W.
   c) Retrouver les formules connues pour $\sum_{k=0}^{n-1} k$, $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$, $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre :
   (i) pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $P(k) \in \mathbb{Z}$
   (ii) P est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes binomiaux
5. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d. On définit la suite de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P(k)}{k!}$.
   Montrer que, quand n tend vers l'infini, v_n admet une limite, multiple entier de e.
   Plus précisément montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha e$ avec $\alpha = \sum_{k=0}^{d} \dfrac{(\Delta^k(P))(0)}{k!}$.