Devoir en temps libre n°13

Ceci est le texte du devoir surveillé n°7 (3h) du 13 janvier 2012
Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

L'énoncé contient 2 pages, les quatre exercices sont indépendants.

Exercice I

Définissons les deux applications suivantes :

$$f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array} \qquad \text{et } g \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(0), P(-1)) \end{array}$$

1. Démontrer que f est une application linéaire. Nous admettrons qu'il en est de même pour g.
2. Démontrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\ker(g) = \text{Vect}(Q)$.
4. Résoudre l'équation $g(P) = (1, 0, -1)$, d'inconnue $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice II

Pour tout $n \geqslant 1$ on pose

$$P_n = X^3 + \frac{1}{n}X - 1.$$

1. P_n peut-il avoir des racines multiples (éventuellement complexes) ?
2. Tracer le tableau des variations de la fonction polynomiale associée à P_n.
3. Montrer que P_n possède exactement une racine réelle que l'on notera x_n et que $x_n \in [0; 1]$.
4. Montrer que $P_n(1 - 1/n) \leqslant 0$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.
5. Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = 1 - x_n$. À l'aide de la relation $P_n(x_n) = 0$, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$.
6. Justifier que P_n admet deux racines complexes y_n et z_n, non réelles.
   Quelle relation existe-t-il entre y_n et z_n ?
7. On note y_n la racine complexe de P_n dont la partie imaginaire est strictement positive.
   (a) Déterminer y_n et z_n en fonction de x_n.
   (b) En déduire les limites de y_n et z_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice III

Soit E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit Φ qui à toute application $f \in E$ associe l'application $\Phi(f)$ définie par :

$$\Phi(f) = \left(x \mapsto \int_0^x t f(t)\, dt\right).$$

On remarque que Φ associe donc *une application* à *une application.*

1. Soit $f \in E$. Justifier que $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\Phi(f)'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que Φ est linéaire sur E.
3. Déterminer $\ker(\Phi)$.
4. On note G l'ensemble des $f \in E$ invariantes par Φ, c'est à dire $G = \{f \in E \mid \Phi(f) = f\}$.
   (a) Prouver que G est un sev de E.
   (b) Prouver que toute $f \in G$ est dérivable.
   (c) Montrer que G est en fait réduit à l'application nulle : $G = \{0_E\}$. (*on pourra utiliser une équation différentielle portant sur f.*)
5. On introduit maintenant l'ensemble F l'ensemble des fonctions g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

(i) $g(0) = g'(0) = 0$;

(ii) g' encore dérivable en 0.

On peut montrer facilement que F est un sev de E. On l'admettra donc.

(a) Montrer que pour tout $f \in E$, $\Phi(f) \in F$.

(b) Soit g dans F. On définit

$$f = x \mapsto \begin{cases} \dfrac{g'(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \\ g''(0) \text{ si } x = 0. \end{cases} .$$

Justifier que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

(c) En déduire que $f \in E$.

(d) En déduire que l'application $\Phi : E \to F$ est un isomorphisme.

Exercice IV

Le but de cet exercice est l'étude des polynômes vérifiant la relation

$$\forall x \in \mathbb{C}^*,\ T_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

Attention : $T_n\left(x + \frac{1}{x}\right)$ *est l'évaluation en* $x + \frac{1}{x}$ *de la fonction polynomiale associée à* T_n *et non le produit* $\left(x + \frac{1}{x}\right) \times T_n(x)$ *!*

1. (a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{C}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{C}^*,\ T_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

2. Démontrer, pour tout entier naturel n, l'unicité du polynôme T_n.
3. Déterminer le degré de T_n. En déduire son nombre de racines complexes.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les racines de T_n.