

Texte du DS du vendredi 9 mars 2012 (3h)

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

L'énoncé contient 2 pages, l'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice I

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$ sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- Déterminer le noyau et l'image de l'application φ , définie comme la restriction de g à $\text{Im}(f)$ (φ est donc une application entre $\text{Im}(f)$ et E).
- Montrer que $\text{rg}(f) = \text{rg}(g \circ f) + \dim_{\mathbb{K}}(\ker(g) \cap \text{Im}(f))$.
- En déduire que $\dim_{\mathbb{K}}(\ker(g \circ f)) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\ker(g)) + \dim_{\mathbb{K}}(\ker(f))$.
- Démontrer que pour tout entier naturel k ,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\ker(f^k)) \leq k \cdot \dim_{\mathbb{K}}(\ker(f)) \quad \text{et} \quad \text{rg}(f^k) \geq k \cdot \text{rg}(f) - n(k-1).$$

Exercice II

Soit n un entier naturel non nul fixé pour la suite de l'exercice.

On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n . On confond polynôme et fonction polynomiale et un polynôme sera noté indifféremment P ou $P(X)$. On note $\deg(P)$ le degré d'un polynôme P .

Soit $T(X)$ un polynôme fixé de $\mathbb{C}[X]$ de degré n .

On définit l'application f qui à tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ associe $Q(X) + XR(X)$ où Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$ (on a donc $P(X^2) = Q(X)T(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < \deg(T)$).

- Montrer que f est une application linéaire.
- Soit P un polynôme non nul de degré p tel que $2p < n$. Montrer que $f(P)$ est non nul.
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Démontrer l'équivalence entre les énoncés :
 - $P \in \ker(f)$;
 - il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(R) < n$ et $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$.

En déduire que si $P \in \ker(f)$, alors $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

- Démontrer que pour tout $P \in \ker(f)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\deg(P) + k \leq n$ alors $X^k P(X) \in \ker(f)$.
- On suppose maintenant que $\ker(f)$ n'est pas réduit au polynôme nul et on note I l'ensemble des entiers naturels k tel qu'il existe un polynôme de $\ker(f)$ de degré k .
 - Montrer que I possède un plus petit élément d .
 - Soit $(P_0, P_1) \in \ker(f)^2$ tel que $\deg(P_0) = d = \deg(P_1)$.
Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $P_1 = cP_0$.
 - Montrer qu'un polynôme P appartient à $\ker(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme S de degré inférieur ou égal à $n-d$ tel que $P(X) = S(X)P_0(X)$.

Problème III

On rappelle les valeurs approchées suivantes :

$$e = \exp(1) \approx 2,72; \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61; \sqrt{2} \approx 1,41 \text{ et } \ln(3) \approx 1,10.$$

Partie A Étude d'une fonction

Soit f la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 3x \exp(-x^2) - 1 = 3xe^{-x^2} - 1$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau des variations de f . Préciser les branches infinies de la courbe représentatives C_f de f .
2. Calculer quand cela est possible $f''(x)$. Qu'en déduit-on pour le point de C_f d'abscisse 0 ?
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0. Étudier la position de la courbe par rapport à la tangente au point d'abscisse 0. Quel résultat retrouve-t-on ?
4. Donner l'allure de la courbe C_f de f .
5. (a) Pourquoi f admet-elle des développements limités en 0 à n'importe quel ordre ?
(b) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.

Partie B Étude d'une équation différentielle : hors barème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$.

Soit H_n l'équation homogène (dite aussi sans second membre) associée à E_n .

1. Résoudre H_n sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.
2. En déduire les solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.
3. Donner toutes les fonctions f définies, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solutions de E_n sur $\mathbb{R}$.
On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$.

Partie C Étude de deux suites

On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2.

Soit $f_n : x \mapsto f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1 = 3x^n \exp -x^2 - 1$.

1. Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?
2. Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
En déduire que f_n s'annule deux fois sur $[0, +\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n , qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.
3. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$?
[hors barème] Déterminer un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.
4. (a) Calculer $\exp -u_n^2 = e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n .
(b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
(c) Déduire de ce qui précède la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$. On note ℓ sa limite.
5. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$?
6. Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par $g_n(x) = \ln 3 + n \ln x - x^2$.
(a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.
(b) On suppose $\ell \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède.
Conclusion ?
(c) Soit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$ définie par : $\forall n \geq 2, w_n = u_n - 1$.
En utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n) = g(u_n)$, trouver un équivalent simple de w_n .