Texte du DS du vendredi 23 mars 2012 (3h)
Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

Problème I

On considère n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On notera $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, $GL_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$, et $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$. I_n désigne la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.
Le but est l'étude des ensembles :

$$R_n(p) = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^p = I_n \right\}$$

Dans la deuxième et la troisième partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, et Id_E est l'application identité de E.

Partie A Généralités

1. $R_n(p)$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?
2. Soit $A \in R_n(p)$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$, et que $A^{-1} \in R_n(p)$.
3. Soit $A \in R_n(p)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}AP \in R_n(p)$.
4. Montrer que $R_n(p) \cap D_n(\mathbb{R})$ est un ensemble fini, dont on déterminera le cardinal.
5. On considère $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, et on appelle d le plus grand diviseur commun de p et q. Montrer que :
$$R_n(p) \cap \mathbb{R}_n(q) = \mathbb{R}_n(d)$$

Partie B Etude de $R_2(2)$

1. Quels sont les éléments de $R_2(2) \cap D_2(\mathbb{R})$?
2. Soit A un élément de $R_2(2)$ tel que $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$, et soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. On a donc $u^2 = \mathrm{Id}_E$.
   (a) Montrer que $\ker(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(u + \mathrm{Id}_E) = E$.
   (b) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (c) Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice. Montrer que P est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et déterminer P^{-1}.
   (d) Déduire de b) et c) qu'il existe quatre réels a, b, c, et d tels que $ad - bc \neq 0$ et :
$$A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{pmatrix}$$
3. En déduire que $R_2(2)$ muni de la multiplication des matrices n'est pas un groupe. Interpréter.

Partie C Etude de $R_2(3)$

Dans toute la suite du problème, M désigne un élément de $R_2(3)$, et v l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M. On considère les sous-espaces vectoriels de E : $F = \ker(v - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \ker(v^2 + v + \mathrm{Id}_E)$ où $v^2 = v \circ v$,
ainsi que les polynômes de $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = X - 1$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$.

1. (a) Montrer que P et Q sont des polynômes premiers entre eux, et déterminer deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus 1 tels que :
$$PU + BV = 1$$
   (b) Déterminer en fonction de v et de Id_E deux endomorphismes w_1 et w_2 de E tels que :
$$\mathrm{Id}_E = (v - \mathrm{Id}_E) \circ w_1 + (v^2 + v + \mathrm{Id}_E) \circ w_2$$
2. En utilisant la question 1), et en remarquant que $(v - \mathrm{Id}_E) \circ (v^2 + v + \mathrm{Id}_E) = (v^2 + v + \mathrm{Id}_E) \circ (v - \mathrm{Id}_)) = 0$, montrer que $F \oplus G = E$.
3. Que peut-on dire de M si F est de dimension 2 ?
4. Le but de cette question est de montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que F n'est pas de dimension 1. On suppose donc que $\dim F = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$ de E telle que F soit la droite vectorielle engendrée par g_1 et G soit la droite vectorielle engendrée par g_2.
   (b) En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $v(g_2) = \alpha g_1 + \beta g_2$, puis aboutir à une contradiction.
5. On suppose dans cette question de $\dim F = 0$.
   (a) Montrer que $(e_1, v(e_1))$ est une base de E.
   (b) En déduire que M est semblable à une matrice simple. Montrer alors qu'il existe un réel a et un réel non nul b tels que :
$$M = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+a+1}{b} \\ b & -a - 1 \end{pmatrix}$$

Problème II

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et $M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.
Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ ou de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite *positive* si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On note alors $M \geqslant 0$.
Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ ou de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite *strictement positive* si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On note alors $M > 0$.
Si M et N sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ ou de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant N$ signifie que $M - N \geqslant 0$ et $M > N$ que $M - N > 0$.
Enfin, une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est dite *productive* si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

Partie A Étude d'exemples

1. Montrer que la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.
2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

Partie B Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les énoncés :

(i) M est positive ;

(ii) pour toute matrice positive $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $MX \geqslant 0$.

Partie C Caractérisation des matrices productives

1. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice productive de $M_n(\mathbb{R})$ et P une matrice positive de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - AP > 0$. On note p_1, ..., p_n les coefficients de la matrice colonne P.
   (a) Montrer que $P > 0$.
   (b) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$. On note x_1, ..., x_n les coefficients de la matrice colonne X, $c = \min\left(\left\{\dfrac{x_j}{p_j} \mid j \in [\![1, n]\!]\right\}\right)$ et k un indice tel que $c = \dfrac{x_k}{p_k}$.
   Démontrer que $c\left(p_k - \sum_j^1 n a_{kj} p_j\right) \geqslant 0$.
   En déduire que $c \geqslant 0$ et que C est positive.
   (c) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = X$. En utilisant $-X$, montrer que X est nulle.
   En déduire que la matrice $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que pour toute matrice positive X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive.
   En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
2. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et $(I_n - B)^{-1}$ positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$ où U est la matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.
3. Donner une caractérisation des matrices positives.
4. Application : soit M un matrice positive de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.
   Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.