Problème

Ce problème comprend 3 parties. Les calculatrices de type « collège » sont autorisées.

Partie A Questions préliminaires.

1. On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt.$$

   (a) Établir une relation de récurrence liant a_n et a_{n+2}.

   (b) En déduire, pour $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$, la relation $a_{2p} = \dfrac{1.3.5...(2p-1)}{2.4.6...(2p)} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.
   Préciser la valeur de a_{2p} pour $p \in \{1; 2; 3\}$.

2. Dans cette question, on veut déterminer, pour $u \in [0;1]$, un encadrement de la fonction $u \mapsto \sqrt{1-u}$.

   (a) Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par : $g(u) = 1 - \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 - \sqrt{1-u}$.
   Étudier les variations de g ; en déduire un encadrement de $g(u)$ pour $u \in [0;1]$.

   (b) Soit h la fonction définie par : $h(u) = 1 - \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 - \sqrt{1-u}$.
   Démontrer que pour tout $u \in [0;1]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{16}u^3 \leqslant h(u) \leqslant \dfrac{3}{8}u^3$.

   (c) Déduire de ce qui précède un encadrement de $\sqrt{1-u}$ pour $u \in [0;1]$.

Partie B Une étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2\sin^2(t)}\ dt$.
L'objet de cette partie est l'étude de f et la construction de sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Déduire des résultats de la première partie que l'on a pour tout réel $x \in [-1;1]$:

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{64}x^4 - \frac{15}{128}x^6\right) \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{64}x^4 - \frac{5}{256}x^6\right).$$

2. (a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

   (b) Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée par défaut de $f(x)$, pour $x \in \left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. On prendra soin de donner à chaque fois la précision de l'approximation.

3. (a) Établir que f est paire et que pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2\cos^2(t)}\ dt$.

   (b) Démontrer que pour tout réel $a \in [0,1[$, f est continue sur $[-a;a]$ (*question délicate, on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis à* $u \mapsto \sqrt{1-u}$).
   En déduire que f est continue sur $]-1;1[$.

   (c) Pour tout couple $(x_1, x_2) \in [0;1]^2$ avec $x_1 < x_2$, comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$. En déduire le sens de variation de f.

4. Déterminer le développement limité de f, à l'ordre 5, au voisinage de 0. Préciser $f'(0)$.

5. Donner le tableau de variations de f et construire (C).

Partie C Applications de l'étude précédente

Les résultats de cette partie seront exprimés en utilisant la fonction f étudiée dans la deuxième partie.

1. Soit $0 < b < a$ des réels. On considère l'ellipse définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t). \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

   (a) On rappelle que la longueur d'une telle courbe est $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$.
   Démontrer que $L = 4af(e)$, où e est l'excentricité de l'ellipse.

   (b) Donner une valeur approchée de L pour $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$. On donnera bien sûr la précision de l'approximation.

2. Soit $x \in]0;1[$. On considère la fonction F définie sur $[0;x[$ par :

$$F(X) = \int_0^X \sqrt{\frac{1-t^2}{x^2-t^2}}\ dt.$$

   En utilisant le changement de variable défini par $t = x\sin(\theta)$, établir que $\lim\limits_{X \to x^-} F(X) = f(x)$.

   Application : déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 1^-} \displaystyle\int_0^\alpha \sqrt{\frac{3-u^2}{1-u^2}}\ dt$.

3. Exprimer à l'aide de f l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2(t)}\ dt.$$