Texte du DS du vendredi 4 mai 2012 (3h)
Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

L'énoncé contient 2 pages, l'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice I Quelques calculs

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$A = \int_{1+\operatorname{sh}1}^{1+\operatorname{sh}2} \frac{1}{t-2+\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t.$$

(On pourra commencer par un changement de variable $t-1=\ sh(u)$.)

2. On veut calculer

$$B = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{1+\sin 3x}\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin 3x$ comme un polynôme en $\sin x$.
   (b) Effectuer le changement de variable $u = \sin(u)$ dans B.
   (c) Déterminer les racines du polynôme $1+3X-4X^3$.
   (d) Calculer B.

3. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{k+1}{kn+n^2}$$

Problème II

Dans tout le problème $[\![2;+\infty[\![$ désigne l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 2.

Partie A comparaison de séries et d'intégrales

Soit f une application continue décroissante et positive de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$. On définit la suite $u_n = f(n)$ et la série :

$$v_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$$

1) Montrer que (v_n) est croissante.
2) Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. En remarquant que pour tout $x \in [k;k+1]$, $f(x-1) \geqslant u_k \geqslant f(x)$, montrer que :

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant v_n \geqslant \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

3) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = L$ existe. Montrer que (v_n) converge.
4) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
5) Enoncer des résultats similaires quand f est négative et/ou croissante.
6) Application : soit z un réel. On pose :

$$v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^z}$$

Déterminer pour quelles valeurs de z la suite (v_n) converge.

Partie B Partie principale de la formule de Stirling

Dans cette partie, on pose pour $x \in]1;+\infty[$:

$$f(x) = 1 + \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

On pose toujours :

$$u_n = f(n) \qquad v_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

1) Déterminer le sens de variation et le signe de f (on pourra calculer $f''(x)$).
2) Calculer :

$$F(x) = \int_2^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe, et la calculer (on pourra poser $h = \frac{1}{x}$ et faire un développement limité quand $h \to 0$).
En déduire que (v_n) converge (faire attention en appliquant les résultats de la première partie). On notera γ sa limite.
3) Montrer que :

$$v_n = n - 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + \ln(n!)$$

(faire intervenir une série téléscopique)
4) Montrer finalement que :

$$n! \sim \delta \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

où δ est un réel que l'on calculera en fonction de γ.

Partie C Intégrales de Wallis et calcul de δ

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\ \mathrm{d}t$$

Les I_n sont les intégrales de Wallis.
1) Calculer I_0 et I_1.
2) En intégrant par parties, montrer que :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

3) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

4) Montrer par une étude directe de l'intégrale que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1}$$

En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$$

5) On pose $\gamma_n = \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n[(2n)!]^2}$. En utilisant la question C.4), déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n$.
Puis, en utilisant la question B.4), calculer δ.
Démontrer alors la formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

6) Application : déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
7) On pose $W(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x t\ \mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Étudier le sens de variation de W, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$(x+1)W(x)W(x+1) = \frac{\pi}{2}$$

et en déduire un équivalent de W au voisinage de $+\infty$.