On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et pour tout entier naturel n, on désigne par E_n le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On identifiera les polynômes et les fonctions polynomiales associées.

Partie I Produit scalaire sur E

Dans cette partie on désigne par $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Soit $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive (appelée densité ou fonction poids).

1. (a) Montrer que l'application définie par $\langle P|Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

   On appelle *système orthogonal* toute famille de polynôme $(P_k)_{k\geqslant 0}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg P_k = k$, et, pour tous $k \neq l$, $\langle P_k|P_l\rangle = 0$.

   (b) Montrer que si $(P_k)_{k\geqslant 0}$ est un système orthogonal, alors $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est nécessairement une base de E_n.

   (c) Justifier l'existence d'un système orthogonal dans E.

   (d) Montrer que si $(P_k)_{k\geqslant 0}$ et $(Q_k)_{k\geqslant 0}$ sont deux systèmes orthogonaux de E, alors il existe une suite de réels non nuls $(\lambda_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $P_k = \lambda_k Q_k$ pour tout entier k.

   (e) En déduire l'existence et l'unicité d'une famille orthogonale de polynômes $(P_k)_{k\geqslant 0}$ de E satisfaisant les conditions suivantes :
   - P_n appartient à E_n et le coefficient de X^n dans P_n, qu'on notera k_n, est strictement positif ;
   - $\langle P_m|P_n\rangle = 0$ si $m \neq n$;
   - $\langle P_n|P_n\rangle = 1$.

2. On considère dorénavant $(P_n)_{n\geqslant 0}$ un système orthogonal, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n appartient à E_n et le coefficient de X^n dans P_n, qu'on notera k_n, est strictement positif. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $\alpha_n^2 = \langle P_n|P_n\rangle$.

   (a) Montrer qu'il existe, pour tout $n \geqslant 1$, un réel A_n tel que $P_{n+1} - A_n X P_n \in E_n$.
   Exprimer A_n en fonction de k_n et k_{n+1}.

   (b) Montrer que $P_{n+1} - A_n X P_n$ est orthogonal à E_{n-2}.
   En déduire qu'il existe, pour tout $n \geqslant 1$, des réels B_n, C_n tel que l'on ait $P_{n+1} = (A_n X + B_n)\, P_n + C_n P_{n-1}$.

   (c) Expliquer que $\langle XP_n|P_{n-1}\rangle = \langle P_n|XP_{n-1}\rangle$ et exprimer ce produit scalaire en fonction de k_n, k_{n-1} et α_n.

   (d) Exprimer C_n en fonction de k_n, k_{n-1}, k_{n+1}, α_{n-1}, α_n.

3. On se propose ici de démontrer que, pour $n \geq 1$, tous les zéros de P_n sont réels, simples et contenus dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. Pour cela on examinera les deux possibilités suivantes :

   (a) Il n'existe aucun zéro de P_n, contenu dans $]a, b[$, de multiplicité impaire ; dans ce cas, on calculera $\langle P_n|1\rangle$;

   (b) Il existe de tels zéros, que l'on note a_1, …, a_r (chacun étant compté une seule fois) ; dans ce cas, on calculera $\langle Q_n|1\rangle$, où $Q_n(x) = P_n(x)(x - a_1)\dots(x - a_r)$.

   (c) Conclure.
   On désigne désormais par $r_{k,1} < r_{k,2} < \cdots < r_{k,k}$ les racines de P_k : ce sont les *points de Gauss* du polynôme P_k.

   (d) Pourquoi cette suite ne dépend-elle que de w et pas du choix de la suite orthogonale ?

Partie II Polynômes de Legendre

On reprend les notations et les résultats de la partie précédente. On suppose désormais que $[a, b] = [-1, 1]$ et w est la fonction constante égale à 1. On considère les fonctions L_n définies par $L_0(x) = 1$ et pour $n \geqslant 1$,

$$L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2 - 1)^n\right).$$

1. Montrer que L_n est un polynôme de degré n et déterminer son coefficient dominant.
2. Calculer $L_n(1)$. (*On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant* $\frac{d^n}{dx^n}\left[(x + 1)^n(x - 1)^n\right]$).
3. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [-1, 1]$, $L_n(-x) = (-1)^n L_n(x)$.
4. Montrer que la famille de polynômes $(L_n)_{n\geqslant 0}$ est un système orthogonal.
   On pourra pour cela introduire $B_{p,q} = \left[(X^2 - 1)^p\right]^{(q)}$ *et utiliser des intégrations par parties.*
5. On se propose de trouver une relation de récurrence explicite pour les polynômes de Legendre. On reprend les résultats et les notations de la partie I.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = 0$.

(b) En considérant $\langle L_n' | L_{n-1} \rangle$, exprimer $nk_n\alpha_{n-1}^2$ en fonction de k_{n-1}.

(c) En déduire α_n^2, puis A_n, en fonction de n.

(d) En utilisant $L_n(-1)$, exprimer C_n en fonction de A_n. En déduire C_n.

(e) Préciser la relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Legendre.

(f) Déterminer L_0, L_1, L_2 et L_3.

6. On considère l'équation différentielle
$$(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0.$$

(a) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = (1-X^2)L_n'' - 2xL_n$. Montrer que Q_n est orthogonal à E_{n-1}.

(b) En déduire que L_n est solution de l'équation différentielle 6.

(c) Réciproquement, montrer que toute solution polynomiale de cette équation est proportionnelle à L_n.

Partie III Polynômes de Tchebychev

On suppose désormais que $J =]-1,1[$ et on considère la densité w qui à $x \in]-1,1[$ associe $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge, c'est-à-dire que les applications $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^0 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ admettent des limites finies quand x tend vers 1.
2. En déduire que les résultats de la partie I s'appliquent dans ce cas.
   On reprend donc les notations et les résultats de cette partie.
3. Montrer que pour tout $(P,Q) \in E^2$, $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\sin\theta)Q(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
   On va maintenant s'intéresser à la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n vérifiant : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
5. Démontrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(X) - 2XT_{n+1}(X) + T_n(X) = 0$.
6. Déterminer T_0, T_1 puis le degré et le coefficient dominant des polynômes T_n.
7. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue une famille orthogonale pour ce produit scalaire.
8. Calculer $T_n(1)$ et rappeler la parité de chaque T_n.
9. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est solution de l'équation différentielle : $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.