

Texte du DS du vendredi 25 mai 2012 (3h)

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

L'énoncé contient 3 pages, l'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice I

On note Δ l'opérateur laplacien : soit W un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et f un élément de $\mathcal{C}^2(W, \mathbb{R})$:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

- On définit la fonction $r : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et on s'intéresse à une fonction f telle que $f(x, y, z) = u(r(x, y, z))$, avec $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Exprimer $\frac{\partial r}{\partial x}$ en fonction de x et r .

Donner, pour tout $x \neq 0$, $\frac{\partial r}{\partial x}(x, x, x)$ et pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\frac{\partial r}{\partial x}(y, x, z)$.

- En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}$ puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction de u , u' , u'' , r et x .

- Exprimer de même $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

- Montrer que pour tout $r > 0$, $\Delta f = u''(r) + \frac{2}{r}u'(r)$.

On considère dans les mêmes conditions, l'équation $\Delta = -\omega^2 f$, où ω est un réel strictement positif, c'est-à-dire l'équation

$$(U) : u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) = -\omega^2 u(r).$$

- Soit u une solution de (U) . On définit la fonction v par $v(r) = ru(r)$.

- Montrer que v vérifie l'équation différentielle $(V) : v'' + \omega^2 v = 0$.
- Résoudre l'équation (V) , en déduire pour $r \neq 0$ les solutions de (U) .
- Déterminer les solutions non nulles de (U) admettant une limite finie quand r tend vers 0.

- On ne conserve pour la suite que les solutions obtenues à la question 2c.

On impose de plus $u'(1) = 0$.

- Déterminer l'équation (Ω) que doit vérifier ω pour que cette condition supplémentaire soit satisfaite.

- Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation (Ω) admet une solution et une seule dans l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi \right[$.

On notera ω_n cette solution. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes (en $\underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n} \right)$) de ω_n .

- Si n et p sont deux entiers naturels distincts, on note u_n et u_p deux solutions de (U) associés respectivement aux valeurs ω_n et ω_p solutions de (Ω) .

Montrer que

$$\int_0^1 u_n(r) u_p(r) r^2 \, dr = 0$$

.

Problème II

Soit $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ le plan muni du produit scalaire canonique et du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ avec $O = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. La norme associée au produit scalaire canonique sera notée $\| \cdot \|_2$ si bien que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|x.e_1 + y.e_2\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Pour a et b deux réels donnés, on définit $\mathcal{D}_{a,b}$ la droite d'équation dans $\mathcal{R}$: $y = ax + b$.

Si $M \in \mathcal{P}$ a pour coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, on note $p_{a,b}(M)$ l'unique point de $\mathcal{D}_{a,b}$ ayant, dans $\mathcal{R}$, la même abscisse x que M .

On définit également la droite $\mathcal{D}'_{a,b}$ la droite d'équation dans $\mathcal{R}$: $x = ay + b$, et $p'_{a,b}(M)$ l'unique point de $\mathcal{D}'_{a,b}$ ayant, dans $\mathcal{R}$, la même ordonnée y que M .

Partie A Droites des moindres carrés dans un cas particulier

Soient A, B et C les trois points de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont respectivement : $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(\alpha, \frac{1}{2})$ où α désigne un réel non nul.

On définit deux applications f_0 et f_1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_0(a, b) = \|\overrightarrow{p_{a,b}(A)A}\|_2^2 + \|\overrightarrow{p_{a,b}(B)B}\|_2^2 + \|\overrightarrow{p_{a,b}(C)C}\|_2^2,$$

$$\text{et } f_1(a, b) = \|\overrightarrow{p'_{a,b}(A)A}\|_2^2 + \|\overrightarrow{p'_{a,b}(B)B}\|_2^2 + \|\overrightarrow{p'_{a,b}(C)C}\|_2^2.$$

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

2. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f_0(a, b)$ et vérifier que $f_0(a, b) = \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que la fonction f_0 admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et que ce minimum est atteint en un unique couple de réels $(0, \frac{1}{2})$, correspondant à la droite, notée $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_{0, \frac{1}{2}}$ d'équation dans $\mathcal{R}$: $y = \frac{1}{2}$.

3. (a) Vérifier que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f_1(a, b) = 3\left(\frac{a}{2} + b - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}\alpha^2$.

(b) En déduire que la fonction f_1 admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et que ce minimum est atteint en un unique couple de réels (a_1, b_1) à déterminer. On note alors $\mathcal{D}_1$ la droite $\mathcal{D}'_{a_1, b_1}$.

4. Montrer que $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont orthogonales et se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ qui est l'isobarycentre de (A, B, C) .

Partie B Résultats sur un espace préhilbertien réel

Soit E un espace préhilbertien réel (*i.e. un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension quelconque, muni d'un produit scalaire*) non réduit à $\{O_E\}$ et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire sur E et $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

1. Donner la définition de $F^\perp$. Démontrer que l'on a $E = F \oplus F^\perp$. (*on rappelle que la dimension de E est quelconque alors que celle de F est finie*).

Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F .

2. Soit $x \in E$. Démontrer que $d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ est bien définie et que cette borne inférieure est atteinte en un unique élément z de F que l'on déterminera.

On dit qu'une application $(x, y) \mapsto (x | y)_F$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un *produit subordonné* à F si elle vérifie les 4 propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in E, y \mapsto (x | y)_F$ est une forme linéaire sur E :

(ii) $\forall (x, y) \in E^2, (x | y)_F = (y | x)_F$;

(iii) $\forall x \in E, \forall y \in F, (x | y)_F = 0$;

(iv) $\forall x \in F^\perp, \forall y \in F, (x | y)_F = (x | y)$.

3. (a) Montrer que si $(x, y) \mapsto (x | y)_F$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un produit subordonné à F alors :
- $\forall (x, y) \in E^2, (x | y)_F = (x - p_F(x) | y - p_F(y))$;
 - $\forall x \in E, (x | x)_F = d(x, F)^2$;
 - $\forall x \in E, (x | x)_F \geq 0$;
 - $\forall x \in E, (x | x)_F = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

(b) Vérifier qu'il existe un unique produit subordonné à F .

On note alors $(\cdot | \cdot)_F$ ce produit subordonné à F et pour $x \in E$, on pose $\|x\|_F = \sqrt{(x | x)_F}$.

4. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2, |(x | y)_F| \leq \|x\|_F \|y\|_F$. À quelle condition sur x et y a-t-on égalité ?
5. Soit $u \in E, \|u\| = 1$. On note $D = \text{Vect}(u)$ et p_D la projection orthogonale sur D .
 Pour tout vecteur $x \in E$, on pose $m_x = (x | u)$ et $\sigma_x = \|x\|_D$.
 Pour tout couple $(x, y) \in E^2$, on pose $\text{cov}(x, y) = (x | y)_D$.

Montrer que pour tout $x \in E, \sigma_x = \|x - m_x \cdot u\|$ et que pour tout $(x, y) \in E^2, \text{cov}(x, y) = (x | y) - m_x m_y$.

On suppose dans la suite de cette partie que x et y sont deux éléments de E tels que la famille (u, x, y) soit libre.

6. Montrer que σ_x et σ_y sont deux réels strictement positifs.

On pose alors $x^* = \frac{x - m_x \cdot u}{\sigma_x}, y^* = \frac{y - m_y \cdot u}{\sigma_y}$ et $\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$.

7. (a) Montrer que $m_{x^*} = 0$, que $\sigma_{x^*} = 1$ et que $\rho \in]-1, 1[$.
 (b) Vérifier alors que (u, x^*) est une base orthonormale de $F = \text{Vect}(u, x)$.
 (c) Justifier que $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|y - a \cdot x - b \cdot u\|$ est bien défini et vérifier que

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|y - a \cdot x - b \cdot u\| = \sigma_y \|y^* - \rho x^*\|.$$

- (d) Déterminer, en fonction de x, y et u , l'unique couple de réels (a_0, b_0) tel que :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|y - a \cdot x - b \cdot u\| = \|y - a_0 \cdot x - b_0 \cdot u\|.$$

Dans le plan $\mathcal{P}$, on définit $D_0 = \mathcal{D}_{a_0, b_0}$ comme la droite dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est $y = a_0 x + b_0$.

- (e) Montrer que D_0 a pour équation dans $\mathcal{R} : \frac{y - m_y}{\sigma_y} = \rho \cdot \frac{x - m_x}{\sigma_x}$.
 (f) Montrer qu'il existe un unique couple de réels (a_1, b_1) tel que :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|x - a \cdot y - b \cdot u\| = \|x - a_1 \cdot y - b_1 \cdot u\|.$$

Et déterminer l'équation de la droite $D_1 = \mathcal{D}'_{a_1, b_1}$.

- (g) Montrer que D_0 et D_1 se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$.
 (h) Montrer que D_0 et D_1 sont orthogonales si et seulement si $(x | y) = m_x m_y$.