Ceci est le texte du DS n°13 du vendredi 15 juin 2013 (4h)
Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repére ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le baréme de correction.

L'énoncé contient 2 pages, les exercices et le problème sont indépendants.

Exercice I

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$
INDICATION : on pourra utiliser un changement de variables linéaire. Ne pas oublier l'inclusion réciproque !
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = f(y,x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x).$$
3. En appliquant ce qui précède à la fonction $f : (x,y) \mapsto \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$, retrouver la formule d'addition de sin.

Exercice II

1. Pour $(m,t) \in \mathbb{R} \times]0,1[$, calculer
$$F(m,t) = \iint_{[[t,1]^2} \frac{1}{(x+y)^m} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$
Attention à ne pas passer à côté de la distinction de cas..
2. Déterminer, pour tout réel m, la limite de $F(m,t)$ quand t tend vers 0^+.

Problème Théorème des quatre sommets.

Dans tout le problème, on considère un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, de classe $\mathcal{C}^2$ dont le point courant pour tout t appartenant à l'intervalle I de $\mathbb{R}$ est noté $M(t) = (x(t), y(t))$. On note s une abscisse curviligne $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ la base de Frenet et c la courbure de l'arc.
On s'intéresse dans ce problème aux sommets de l'arc, définis ici comme les points $M(t)$ pour lesquels $c'(t) = 0$.

Partie A Des exemples

A.1. Soit $p > 0$. On considère l'arc $\mathcal{P} : t \mapsto \left(t, \dfrac{t^2}{2p}\right)$ dont le support est une parabole.
Déterminer les sommets (au sens de l'énoncé : voir préambule) de $\mathcal{P}$: donner leurs coordonnées et la courbure en ces points.
Tracer (rapidement) sur un dessin le support de $\mathcal{P}$, ses sommets et les cercles osculateurs aux sommets.

A.2. Soit $a > b > 0$. On considère l'ellipse $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Déterminer le nombre de sommets de cet arc, ainsi que leurs coordonnées et les rayons de courbures en ces points.

A.3. On considère dans cette question l'arc $\mathcal{C}$ défini par l'équation polaire $\rho(\theta) = \sin(\theta)$.
(a) Tracer le support de $\mathcal{C}$.
(b) En déterminer les sommets. Commentaire ?

Partie B Arcs dont tous les points sont des sommets

On suppose ici que tous les points de l'arc Γ sont des sommets.

B.1. Déterminer les arcs solution dans le cas où $c(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

B.2. Déterminer les arcs solution dans le cas où c n'est pas nulle.

Partie C Une équation différentielle

On suppose ici que l'arc est paramétré par l'abscisse curviligne s.
On désigne par $z(s) = x(s) + iy(s)$ l'afixe du point $M(s)$.

C.1. Rappeler ce qu'est un paramétrage normal. Exprimer $\overrightarrow{T}$ en fonction de z. Donner une relation liant $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et c.

C.2. Démontrer que le paramétrage par l'abscisse curviligne s est normal.

C.3. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer, à l'aide des formules de Frenet, l'équivalence entre les énoncés :

(i) γ est la fonction courbure de l'arc Γ (i.e. $\gamma = c$) ;

(ii) Pour tout réel s, $z''(s) = i\gamma(s)z'(s)$.

C.4. Utiliser cette équation pour retrouver les résultats de la Partie B.

Partie D Arc fermé, simple et strictement convexe

On considère désormais l'arc Γ, paramétré par l'abscisse curviligne s : $M : s \mapsto (x(s), y(s))$. On fait les hypothèses suivantes sur l'arc Γ :

- il est fermé et de longueur L, c'est-à-dire que $s \mapsto M(s)$ est périodique de plus petite période L ;
- il n'admet pas de point double, c'est-à-dire que $s \mapsto M(s)$ est injective sur $[0, L[$ (on dit que l'arc est simple) ;
- il est strictement convexe, c'est-à-dire que pour tout s_0, l'ensemble des points $M(s)$ différents de $M(s_0)$ est contenu dans l'un des deux demi-plans ouverts (*i.e.* ne contenant pas la droite de séparation) définis par la tangente en $M(s_0)$.

D.1. On considère deux réels $s_1 < s_2 < s_1 + L$ et on se place dans un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est la droite $(M(s_1)M(s_2))$ dans lequel on désigne par $(X(s), Y(s))$ les coordonnées de $M(s)$.

(a) Montrer qu'il n'existe pas de réel $u \in]s_1, s_2[$ tel que $Y(u) = 0$.
(on pourra faire un dessin et raisonner par l'absurde en supposant l'existence d'un point $M(u)$ avec $Y(u) = 0$ et $u \in]s_1, s_2[$.)

(b) Démontrer que tous les points $M(u)$ avec $u \in]s_1, s_2[$ se trouvent dans le même demi-plan ouvert défini par l'axe des abscisses (OX).

(c) Démontrer que tous les points $M(u)$ avec $u \notin [s_1, s_2]$ se trouvent dans l'autre demi-plan ouvert défini par l'axe des abscisses (OX).

D.2. Justifier que la fonction c atteint un maximum et un minimum dans $[0, L]$ et en déduire que l'arc Γ a au moins deux sommets que l'on note $M(s_1)$ et $M(s_2)$ avec $0 \leqslant s_1 < s_2 < L$.

D.3. On suppose que c' ne s'annule qu'en s_1 et s_2 sur la période $[s_1, s_1 + L[$.
On se place dans le repère vu précédemment dont l'axe des abscisses est la droite $(M(s_1)M(s_2))$.

(a) Démontrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $X''(s) = -c(s)Y'(s)$.

(b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{s_1}^{s_1+L} c'(s)Y(s)\,\mathrm{d}s = 0$.

(c) En étudiant le signe de $c'Y$, montrer que $\displaystyle\int_{s_1}^{s_1+L} c'(s)Y(s)\,\mathrm{d}s \neq 0$.

(d) En déduire une contradiction donc que c' s'annule en un point $s_3 \in]s_1, s_2[$.

D.4. On suppose que c' ne s'annule qu'en s_1, s_2 et s_3 sur la période $[s_1, s_1 + L[$.
Sans perdre de généralité, on suppose que $s_1 < s_2 < s_3$ et que s_1 est un minimum de c.

(a) Montrer que c' s'annule sans changer de signe en s_2 ou en s_3.

(b) En déduire une contradiction et un théorème sur le nombre de sommets d'un arc fermé, simple et strictement convexe.

(c) Le théorème précédent est-il optimal ?