Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

Les cinq exercices sont indépendants. L'énoncé contient 2 pages.

Exercice 1 Soit E un ensemble.
Si A est une partie de E, on appelle *fonction caractéristique de* A l'application χ_A de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$ définie par

$$\chi_A : x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E et χ_A, χ_B leurs fonctions caractéristiques respectives.
Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $h = 1 - \chi_A$, définie par $x \mapsto 1 - \chi_A(x)$;
2. $\varphi = \chi_A \chi_B$, définie par $x \mapsto \chi_A(x)\chi_B(x)$;
3. $\psi = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$, définie par $x \mapsto \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$.

Exercice 2 On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45.$$

1. (a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution réelle d que l'on déterminera.
   (b) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution imaginaire pure a que l'on déterminera.
   (c) En déduire qu'il existe un couple (p, q) de nombres complexes tel que

   $$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = (z-d)(z-a)(z^2 + pz + q).$$

   (d) Résoudre l'équation $f(z) = 0$. Les nouvelles solutions seront notées b et c, b étant la solution de partie réelle 1.
2. On note A, B, C et D les points du plan $\mathbb{R}^2$ dont les affixes respectives sont a, b, c et d.
   (a) Montrer qu'il existe une rotation r qui transforme A en B et C en D. On précisera son centre, ainsi que le cosinus et le sinus d'une mesure de son angle. A-t-on unicité d'une telle rotation ?
   (b) Montrer qu'il existe une homothétie h qui transforme A en B et D en C. On précisera son centre, ainsi que son rapport. A-t-on unicité d'une telle homothétie ?

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. On note $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left|\zeta^k - 1\right|$ et $T_n = 2\,\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
   (a) Vérifier que $R_n = T_n$ pour $n = 1, 2$ et 3.
   (b) Démontrer dans le cas général que $R_n = T_n$.
2. On souhaite calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\zeta^k$.
   (a) Montrer que $(1-\zeta)S + n\zeta^{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \zeta^k$.
   (b) En déduire l'expression de S en fonction de ζ.
   (c) Calculer S en fonction de n.
   (d) Si on prend $\zeta = 1$, que vaut S ?

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des racines n^{e} de l'unité et on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \displaystyle\sum_{z \in \mathcal{U}_n} z^k$.

1. Rappeler la définition de $\mathcal{U}_n$ et utiliser un paramétrage entier de $\mathcal{U}_n$ pour écrire A_k sous une forme $A_k = \displaystyle\sum_{p=\cdots}^{\cdots} \cdots$.
2. Calculer A_1.
3. Calculer A_k en fonction des valeurs de k.

Exercice 5 Soit E un ensemble.
Soit $\cdot$ une loi *idempotente* sur E, c'est-à-dire une loi de composition interne sur E qui est associative, commutative et telle que : $\forall x \in E, \quad x \cdot x = x$.
On définit sur E la relation $\leqslant$ par : $\forall x, y \in E$, $x \leqslant y \Leftrightarrow x \cdot y = x$.

1. On suppose dans cette question que X est un ensemble et $E = \mathcal{P}(X)$.
   (a) Vérifier que $\cap$ est une loi de composition interne sur E idempotente et déterminer la relation $\leqslant$ qui lui est associée.
   (b) Mêmes questions avec la loi $\cup$.
2. Dans le cas général, montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E.
   Cette relation définit-elle un ordre total ?
3. Démontrer que, pour la relation d'ordre $\leqslant$, pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \cdot y = \inf(\{x, y\})$.
   On rappelle que la borne inférieure d'une partie de E est s'il existe le plus grand des minorants de cette partie.