Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

Les cinq exercices sont indépendants. L'énoncé contient 2 pages.

Exercice 1. Résoudre (sur $\mathbb{R}$) les équations différentielles suivantes *(dans cet exercice, on ne demande et donc ne note que le résultat, qui devra cependant être donné de façon précise)* :

1. $(E) : ty' + y = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$;
2. $(F) : y'' - y' + y = t^2 e^{2t}$.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de déterminer tous les couples (n, p) d'entiers naturels non nuls tels que (E) $n^p = p^n$.

1. Faire le tableau des variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. Établir un lien entre l'équation (E) et la fonction f.
3. Résoudre l'équation diophantienne (E).

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.
Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x+\alpha}{1-x\alpha}\right) - \arctan(x) - \arctan(\alpha)$$

prend des valeurs constantes (que l'on déterminera) sur des intervalles (que l'on déterminera).

Exercice 4.

1. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel x,

$$\int_0^{-x} f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^{x} f(-t)\ \mathrm{d}t.$$

On pourra utiliser le théorème fondamental de l'analyse, avec par exemple les fonctions $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{-x} f(t)\ dt$ *et* $G : x \mapsto -\displaystyle\int_0^{x} f(-t)\ dt$.

2. Soient a et b deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$. On suppose que a est impaire et que b est paire.
Démontrer que l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

admet une unique solution impaire.

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Si $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.
On rappelle que pour tout $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

A. Résultats généraux

(A.1) Rappeler, si $A \in \mathcal{P}(E)$, la définition de l'image directe $f(A)$.

(A.2) Rappeler, si $M \in \mathcal{P}(F)$, la définition de l'image réciproque $f^{-1}(M)$.

(A.3) Démontrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(E)$.

B. Pour toute partie A de E, on définit *la saturée* de A par : $s(A) = f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{P}(E)$.

(B.1) Montrer que pour tout $A \subset E$, $A \subset s(A)$.

(B.2) Si f est injective, que peut-on dire de l'application $s : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $A \mapsto s(A)$?

(B.3) Montrer que pour tout $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$,

i. si $A \subset B$, alors $s(A) \subset s(B)$;

ii. $s(A \cup B) = s(A) \cup s(B)$;

iii. $s(A \cap B) \subset s(A) \cap s(B)$.

C. On dit qu'une partie $A \in \mathcal{P}(E)$ est *saturée* si $s(A) = A$.

(C.1) Démontrer que E est saturée.

(C.2) Démontrer que toute partie $A \in \mathcal{P}(E)$, $s(A)$ est saturée.

(C.3) Démontrer que l'union de deux parties saturées est saturée.

(C.4) Démontrer que l'intersection de deux parties saturées est saturée.

(C.5) Démontrer que le complémentaire dans E d'une partie saturée est saturée.

D. Pour toute partie A de E, on définit *le noyau* de A par : $n(A) = \overline{s(\overline{A})}$.

(D.1) Démontrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $n(A) \subset A$.

(D.2) Démontrer que pour toutes parties $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, si $A \subset B$, alors $n(A) \subset n(B)$.

(D.3) Démontrer que $n(A)$ est -pour l'inclusion d'ensembles- la plus grande partie saturée de E contenue dans A.