

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

Les quatre exercices sont indépendants. L'énoncé contient 2 pages.

Exercice 1. Étudier et tracer le support de l'arc paramétré donné par les relations :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = \arctan(t^2) \\ y(t) = t^3. \end{cases}$$

Exercice 2. Dans tout l'exercice, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient I et J les points tels que $\vec{OI} = \vec{u}$ et $\vec{OJ} = \vec{v}$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe plane définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto M(t) \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = (1-t)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

1. Définir la transformation du plan qui transforme $M(t)$ en $M(1-t)$, pour tout $t \in [0, 1]$.
Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
2. Étudier les variations de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $[0, 1]$.
3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une tangente en chacun de ses points. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $M(t)$. En particulier, quelles sont les tangentes pour $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$?
4. Pour $t \in]0, 1[$, la tangente en $M(t)$ à $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $R(t)$ et l'axe des ordonnées en $S(t)$.
Calculer pour tout $t \in [0, 1]$, $\| \overline{OR(t)} \| + \| \overline{OS(t)} \|$.
5. Tracer soigneusement $\mathcal{C}$.

Exercice 3. Soit $(G, \times)$ un groupe de neutre e .

On note, si $x, y \in G$, xy au lieu de $x \times y$, x^{-1} le symétrique (ou inverse) de x par $\times$ et $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = e$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = xx^n$.

On prendra soin de noter que G n'est pas supposé commutatif.

Un élément x de G est dit *d'ordre fini* si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$.

Si x est d'ordre fini, le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$ est appelé l'*ordre* de x .

1. (a) Dans $(\mathbb{C}^*, \times)$, quels sont les éléments d'ordre 5 ?
 (b) Déterminer, dans $(\mathbb{R}^*, \times)$, les éléments d'ordre fini.
 (c) Montrer que tous les éléments de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ sont d'ordre fini et donner un majorant de l'ordre de chaque élément.
On fera attention que la loi est ici notée + et qu'il convient donc d'adapter les notations du préambule...
2. Soit $(a, b) \in G^2$.
 (a) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a^n = e$, alors l'ordre de a divise n .
 (b) Montrer que si a, b et ab sont d'ordre 2, alors $ab = ba$.
 (c) Montrer que si a est d'ordre fini, alors a^{-1} et $b^{-1}ab$ sont aussi d'ordre fini et ont le même ordre que a .
 (d) Montrer que si ab est d'ordre fini, alors ba aussi et est de même ordre que ab .
3. On suppose *dans cette question uniquement* que $(G, \times)$ est un groupe commutatif. On note $T = \{x \in G \mid x \text{ est d'ordre fini}\}$.
 Montrer que T est un sous-groupe de $(G, \times)$.
4. On suppose *dans cette question uniquement* que G est de cardinal fini.
 (a) Démontrer que tout élément de G est d'ordre fini.
 (b) On note A l'ensemble des éléments de G d'ordre impair.
 Démontrer que :
 i. si $x \in A$, alors $x^2 \in A$;
 ii. si y est d'ordre $2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $y = (y^{n+1})^2$.
 iii. l'application $f : x \mapsto x^2$ est une permutation de A .
5. Soit $(H, \star)$ un second groupe, de neutre e_H et f un morphisme de groupes de $(G, \times)$ dans $(H, \star)$.
 (a) Montrer que si $x \in G$ est d'ordre fini et que l'on note n son ordre, alors $f(x)$ est d'ordre fini et que son ordre divise n .
 (b) Application : trouver tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. On suppose que $a \wedge b = 1$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note r_k le reste de la division euclidienne de a^k par b .
 Démontrer qu'il existe deux entiers naturels $p < q$ tels que $r_p = r_q$.
2. En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n \equiv 1[b]$. On justifiera où l'hypothèse $a \wedge b = 1$ est utilisée.
3. Avec $a = 4$ et $b = 6$, montrer que le résultat précédent est faux si on n'a pas l'hypothèse $a \wedge b = 1$.
4. Calculer les restes des divisions euclidiennes de 2^{2012} et de 5^{2012} par 7.