Devoir en temps limité n°6

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

Les trois exercices et le problème sont indépendants. L'énoncé contient 2 pages.

Exercice 1. Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4$. Montrer que le polynôme $P(X)=X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}$ est divisible par le polynôme $Q(X)=X^3+X^2+X+1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 (d'après E3A PSI 2007)**.** Soit n un entier naturel, $n\geqslant 2$ et soient $a_1,a_2,\dots,a_n$ des éléments de $\mathbb{C}$ non tous nuls et P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $P=X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_{n-1}X+a_n$.
On désigne par z une racine dans $\mathbb{C}$ de P.
Soit Q le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $Q=X^n-|a_1|X^{n-1}-\cdots-|a_{n-1}|X-|a_n|$.

1. Soit g l'application de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, $t\mapsto g(t)=1-\frac{|a_1|}{t}-\cdots-\frac{|a_{n-1}|}{t^{n-1}}-\frac{|a_n|}{t^n}$.
   (a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
   (b) Prouver que Q admet une unique racine dans $]0,+\infty[$; elle sera notée x_0.
2. Soit α élément de $]0,+\infty[$ tel que $Q(\alpha)\geqslant 0$. Étudier le signe de $Q(|z|)$. En déduire que $|z|\leqslant x_0\leqslant\alpha$.
3. En appliquant le résultat de la question précédente pour une valeur de α judicieusement choisie, démontrer que
$$|z|<1+\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|\,.$$

Exercice 3. Soit $P(X)=X^2-2X+2$ et $Q(X)=X^5+\alpha X+\beta$ où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer α et β pour que P divise Q.
2. Décomposer alors Q dans $\mathbb{R}[X]$.

Problème Cœur et Nilespace d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On note Id_E l'endomorphisme identité de E.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel V de E est dit *stable par* f lorsque pour tout vecteur $x\in V$, on a $f(x)\in V$. Lorsque le sous-espace vectoriel V est stable par f, on peut considérer sa restriction $f_{|V}:V\to V$. Il est alors évident que $f_{|V}\in\mathcal{L}(V)$.

On définit par récurrence la suite d'endomorphismes $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi :
$$f^0=\mathrm{Id}_E \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N}, f^{n+1}=f\circ f^n.$$

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on note $F_n=\mathrm{Im}(f^n)$ et $G_n=\ker(f^n)$.

Partie A Propriétés générales

1. (a) Préciser F_0 et G_0.
   (b) Justifier, sans calcul, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et G_n sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (c) Montrer que que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
   (d) Montrer que que la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
2. On pose $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{ x \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, x \in F_n\}$ et $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \{x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N}, x \in G_n\}$.
   (a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Démontrer que F est stable par f.
   (c) Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
   (d) Démontrer que G est stable par f.
   (e) Déterminer F et G dans le cas où f est un automorphisme de E.

Partie B Étude d'exemples

Pour cette question, on prend $E = \mathbb{R}[X]$ munit de sa structure canonique de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Si on prend $f : P \mapsto P'$, justifier que $f \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer F et G.
2. Si on prend $f : P \mapsto XP$, justifier que $f \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer F et G.

Partie C Des résultats techniques

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+1} = F_n$.
   (a) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F_{n+p} = F_n$.
   (b) Justifier l'existence d'un plus petit entier $s \in \mathbb{N}$ tel que $F_{s+1} = F_s$.
   (c) Démontrer que $F = F_s$.
   (d) Démontrer que $E = F + G_s$.
2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_{n+1} = G_n$.
   (a) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $G_{n+p} = G_n$.
   (b) Justifier l'existence d'un plus petit entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $G_{r+1} = G_r$.
   (c) Démontrer que $G = G_r$.
   (d) Démontrer que $F_r \cap G = \{ 0_E\}$.
3. (a) On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$ et $G_{n+1} = G_{n+2}$.
   Montrer que $G_n = G_{n+1}$.
   (b) On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_n = G_{n+1}$ et $F_{n+1} = F_{n+2}$.
   Montrer que $F_n = F_{n+1}$.

Partie D Décomposition A+N

On suppose que l'endomorphisme f est *de caractère fini*, c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+1} = F_n$ et un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $G_p = G_{p+1}$. On note alors s et r les entiers définies aux questions 1b et 2b de la partie Partie C.

1. Montrer que $r = s$.
2. Établir que F et G sont supplémentaires dans E.
3. Démontrer que la restriction de f à F est un automorphisme de F.
4. Démontrer que la restriction de f à G est nilpotente *(on rappelle qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(V)$ est nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $u^q = 0_{\mathcal{L}(V)}$)* .