Devoir en temps limité n°8

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

Les trois exercices sont indépendants. L'énoncé contient 2 pages.

Exercice 1 (un peu de calcul).

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}-\cos(x)}$.
2. (a) Déterminer un équivalent simple en $\frac{\pi}{4}$ de $h : x \mapsto \ln(\sin(2x))$

   (b) Déterminer le développement limité en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 4 de la fonction $g : x \mapsto \tan(x)\ln(\sin(2x))$.

Exercice 2 (Développement asymptotique d'une suite).

Dans tout l'exercice, n désigne un nombre entier naturel non nul.

1. Calculer, pour tout réel x non nul, la valeur de $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.
2. Montrer que dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $(E) : \tan(x) - \frac{x^2}{1+x} = 0$ admet une unique solution.
   On note x_n cette solution.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et donner un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose $y_n = x_n - n\pi$.
   Exprimer y_n à l'aide de la fonction arctan et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
5. Déterminer un équivalent simple de $y_n - \frac{\pi}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. En déduire un développement asymptotique de x_n (suivant les puissances entières relatives de $\frac{1}{n}$) comportant 3 termes.
7. En déduire un développement asymptotique de $\frac{1}{x_n}$ et de $\frac{1}{{x_n}^2}$ (suivant les puissances entières naturelles de $\frac{1}{n}$), comportant respectivement 3 et 2 termes.
8. En déduire un développement asymptotique de x_n (suivant les puissances entières relatives de $\frac{1}{n}$) comportant 5 termes.

Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 2$.
Pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit le commutant de f comme l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$.

1. Questions de cours : on ne demande pas de démonstrations, mais on sera attentif à la précision des réponses.
   (a) Rappeler les structures d'anneau et de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est-il de dimension finie ? Si oui, en donner la dimension.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Démontrer que $C(f)$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Démontrer que $C(f)$ est un sous-ev de $\mathcal{L}(E)$.
   (c) Justifier que la dimension de $C(f)$ n'est pas 0.
   (d) Démontrer que pour tout $g \in C(f)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a
   $$g(\ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E)) \subset \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E).$$
   (e) On prend dans cette question $E = \mathbb{C}^2$ et on définit les applications f, g de E dans E par $g(x, y) = (x, x + y)$ et $f(x, y) = (x, 0)$.
      i. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(E)$. On l'admettra pour g.
      ii. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $\ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.
      iii. Pour $\lambda = 0$, vérifier que l'on a $g(\ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E)$.
      iv. Démontrer que $g \notin C(f)$.
3. On suppose dans cette question que f est une homothétie. Déterminer $C(f)$.
4. Soit s une symétrie vectorielle de E.
   (a) Démontrer que $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.
   (b) En déduire une relation entre les dimensions de ces espaces.
   (c) Démontrer, pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, l'équivalence entre les énoncés :
      (i) $g \in C(s)$;
      (ii) $g(\ker(s - \mathrm{Id}_E)) \subset \ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $g(\ker(s + \mathrm{Id}_E)) \subset \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.
   (d) Définir, en utilisant la question précédente, un isomorphisme entre $C(s)$ et $\mathcal{L}(\ker(s - \mathrm{Id}_E)) \times \mathcal{L}(\ker(s + \mathrm{Id}_E))$. En déduire $\dim_{\mathbb{C}}(C(s))$ en fonction de $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(s - \mathrm{Id}_E))$ et de $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(s + \mathrm{Id}_E))$.
   (e) En déduire que si $s \neq \mathrm{Id}_E$ et $s \neq -\mathrm{Id}_E$, alors il existe un endomorphisme de E qui ne commute pas avec s.
5. Démontrer que les endomorphismes qui commutent avec toutes les symétries vectorielles de E sont les homothéties.
   On pourra se fixer x et définir une symétrie s par rapport à Vect(x) et tirer les conséquences sur l'image de x de la commutativité avec s.