Devoir en temps limité n°9

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

L'exercice et le problème sont indépendants. L'énoncé contient 3 pages.

Exercice 1.

On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.
3. Prouver que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} + \alpha a_{n+1} + \beta a_n = 0 = b_{n+2} + \alpha b_{n+1} + \beta b_n,$$
avec α et β des réels que l'on déterminera.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème

Dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, au point M de coordonnées (x, y), on associe l'affixe $m = x + iy$.
Soient A, B et C trois points du plan distincts deux à deux du plan, d'affixes respectives a, b et c.
On note $\Delta(ABC)$ le triangle formé par les points A, B et C *(on notera que l'ordre importe dans cette définition)*.
Soient p et q deux nombres réels strictement positifs.

Partie A Questions de cours

A.1. Démontrer que si $z, w \in \mathbb{C}$, on a l'inégalité $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ *(on admet les propriétés de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$)*.

A.2. Traiter le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

A.3. On note j et w sont les racines troisièmes de l'unité différentes de 1, avec $\mathrm{Im}(j) > 0$.
Exprimer les nombres complexes j et w sous forme algébrique, donner trois relations simples entre j et w et donner le polynôme unitaire de plus petit degré de racines j et w.

Partie B La notion de $(p : q)$-point

B.1. Montrer qu'il existe un unique point du plan d'affixe z vérifiant $\dfrac{z-a}{b-z} = \dfrac{p}{q}$.
On appelle ce point le $(p : q)$-point de A à B. Donner son affixe ainsi qu'une interprétation géométrique.

B.2. Soit $\alpha \in]0, +\infty[$. Montrer que le $(p : q)$-point de A à B et le $(\alpha p : \alpha q)$-point de A à B coïncident.

B.3. Caractériser le $(1 : 1)$-point de A à B.

B.4. On note Z le $(p : q)$-point de A à B et W le $(p : q)$-point de A à C. Montrer que la droite (ZW) est parallèle à la droite (BC).

Partie C La notion de $(p : q)$-sous-triangle

On appelle $(p : q)$-sous-triangle du triangle $\Delta(ABC)$ le triangle $\Delta(A'B'C')$ où A' est le $(p : q)$-point de A à B, B' est le $(p : q)$-point de B à C et C' est le $(p : q)$-point de C à A. On note a', b' et c' leurs affiches respectives.

C.1. On rappelle que l'isobarycentre est le barycentre de points affectés des mêmes coefficients. Donner l'affixe de l'isobarycentre du triangle $\Delta(ABC)$.

C.2. Montrer que le $(p : q)$-sous-triangle $\Delta(A'B'C')$ du triangle $\Delta(ABC)$ à le même isobarycentre que le triangle $\Delta(ABC)$.

Partie D Étude de suites de $(p : q)$-sous-triangles

On considère la suite de triangles $(\Delta(A_kB_kC_k))_{k\in\mathbb{N}}$ construit de la manière suivante :
$\Delta(A_0B_0C_0) = \Delta(ABC)$ et pour tout entier naturel k, $\Delta(A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1})$ est le $(p : q)$-sous-triangle du triangle $\Delta(A_kB_kC_k)$.
On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k, b_k et c_k les affixes respectives des points A_k, B_k et C_k.

D.1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a la relation matricielle $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & p & q \\ p & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = a_k + b_k + c_k$, $\beta_k = a_k + jb_k + j^2c_k$ et $\gamma_k = a_k + j^2b_k + jc_k$.

D.2. Vérifier que les suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont géométriques de raisons respectives 1, $\dfrac{q + j^2p}{p+q}$ et $\dfrac{q + jp}{p+q}$.

D.3. Démontrer que ces trois suites sont convergentes et préciser leur limite *(on pourra utiliser les résultats de la Partie A)*.

D.4. Déterminer une matrice $V \in M_3(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$.

D.5. Dans cette question, on va prouver que V est inversible et déterminer son inverse.

(a) Calculer le déterminant de V et montrer que V est inversible.

(b) On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $B \in M_3(\mathbb{C})$ et si on pose $C = BQ$, comment se déduit la matrice C de la matrice B ?

(c) Calculer V^2 et en déduire que V^{-1} est de la forme $\dfrac{1}{m}VQ$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ que l'on précisera.

D.6. En déduire que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leur limite.

Partie E Étude d'une application linéaire

On reprend la matrice V définie à la question **D.4** et on définit l'application φ de $M_3(\mathbb{C})$ dans $M_3(\mathbb{C})$ pour toute matrice M de $M_3(\mathbb{C})$ par $\varphi(M) = V^{-1}MV$.

E.1. Montrer que φ est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{C})$.

E.2. Montrer que pour tout couple $(M, N) \in M_3(\mathbb{C})^2$, $\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$.

E.3. Montrer que φ est un automorphisme de $M_3(\mathbb{C})$ et expliciter son application réciproque.

E.4. On pose $A_{(p,q)} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & p & q \\ p & 0 & q \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A_{(p,q)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,.

(b) Montrer que $A_{(p,q)} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = \dfrac{q + jp}{p + q} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

(c) Donner une expression similaire pour $A_{(p,q)} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$.

E.5. Justifier, <u>sans calcul</u>, que $\varphi(A_{(p,q)}) = D$ où D est une matrice diagonale dont on précisera les coefficients.

E.6. En déduire que si r et s sont des réels positifs, alors les matrices $A_{(p,q)}$ et $A_{(r,s)}$ commutent.

E.7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $A_{(1,n)}A_{(1,n-1)} \cdots A_{(1,2)}A_{(1,1)} = VD_nV^{-1}$ où D_n est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont 1, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}$

(b) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left|1 + \dfrac{j}{k}\right| \leqslant 1$ et $\left|1 + \dfrac{j^2}{k}\right| \leqslant 1$

(c) Montrer que les suites $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.