Devoir en temps limité n°10

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

Les deux exercices et le problème sont indépendants. L'énoncé contient 2 pages.

Exercice 1.

On s'intéresse, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. On note, pour $t > 0$, $h(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ et $h(0) = \beta \in \mathbb{R}$.
   (a) À l'aide de la théorie de l'intégration sur un segment vue en cours, justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} (h(t))^n \,\mathrm{d}t$ est bien définie. Quelle est l'influence de β sur I_n ?
   En déduire une justification de l'écriture $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t$.
   (b) Étudier les variations de h et en déduire pour $n \geqslant 1$ celle de h^n.
2. Soit $0 < \alpha < \pi$ un réel donné. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 < I_n \leqslant \alpha + \pi \left(\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha}\right)^n$.
3. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_i + b_j \neq 0$.
On se propose de calculer le déterminant $\Delta_n = \det(M)$ où M est la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ définie par ses coefficients :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j}.$$

1. S'il existe $i \neq j$ tel que $a_i = a_j$, que vaut Δ_n ? A-t-on le même résultat sur les b_i ?
2. Dans le cas $n = 2$, justifier les étapes du calcul suivant et en déduire une formule pour Δ_2

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \frac{1}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \dfrac{a_2+b_1}{a_1+b_1} & \dfrac{a_2+b_2}{a_1+b_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} 1+\dfrac{a_2-a_1}{a_1+b_1} & 1+\dfrac{a_2-a_1}{a_1+b_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(a_2-a_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)(a_1+b_2)} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

3. En s'inspirant de ce calcul, déterminer Δ_3 dans le cas $n = 3$.
4. En s'inspirant à nouveau de ce qui précède, comment calculer Δ_n pour tout entier $n \geqslant 2$. On donnera le résultat sous forme compacte (avec des $\prod_{i=1}^n \ldots$) et on expliquera la méthode sans cependant entrer dans les détails de rédaction.

Problème Hyperplan matriciel

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On rappelle que la trace d'une matrice carrée A est la somme de ses éléments diagonaux, notée $\mathrm{Tr}(A)$.
Ainsi, si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que si A et B appartiennent à $M_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(a) Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$.
Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$ est indépendante de la base $\mathscr{B}$. On note cette quantité $\mathrm{Tr}(f)$.

(b) On suppose que f est un projecteur de E. Exprimer $\mathrm{Tr}(f)$ en fonction de $\mathrm{rg}(f)$.

(c) On suppose que $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{rg}(f) = 1$. Montrer que f est un projecteur.
On pourra considérer la matrice représentative de f dans une base judicieusement choisie.

4. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\varphi \in \mathscr{L}(F, \mathbb{K})$ une forme linéaire sur F.

(a) On suppose que φ n'est pas l'application nulle. Montrer que $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de F.

(b) Soit H un hyperplan de F. En considérant un supplémentaire de H, montrer que H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur F.

5. Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi_B = M \mapsto \mathrm{Tr}(BM)$ appartient à $\mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

6. Montrer que l'application $\varphi = B \mapsto \varphi_B$ appartient à $\mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}))$.

7. Montrer que φ est injective.

8. Montrer que pour tout $\Phi \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$, il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\Phi = \varphi_B$.

9. Soit $r \in [\![1, n]\!]$ et $J_r = \left((\sum_{k=1}^{r} \delta_{ik}) \times \delta_{ij} \right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$.

On note $\mathscr{B}_n = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à J_r (*c'est-à-dire tel que* $Mat_{\mathscr{B}_n}(f) = J_r$).

(a) Dessiner la matrice J_r.

(b) Déterminer la matrice représentative de f de la base $\mathscr{B}_n$ dans la base $\mathscr{B}'$ si $\mathscr{B}'$ désigne la base $(e_2, e_3, \cdots, e_n, e_1)$, c'est-à-dire déterminer $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}_n, \mathscr{B}')$.

(c) Soit B une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe deux matrices Q et P appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice V de trace nulle appartenant à $M_n(\mathbb{K})$ telles que $B = QVP$.

10. Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que H contient une matrice inversible.