Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le plus grand soin sera porté à la rédaction ainsi qu'à la présentation de la copie. Environ deux points sur vingt y seront consacrés dans le barème de correction.

L'exercice et les problèmes sont indépendants. L'énoncé contient 3 pages.

Exercice I

Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x,y) & = & \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ f(0,0) & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} g(x,y) & = & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ g(0,0) & = & 0. \end{array}\right.$$

Faire l'étude de la continuité de f et g sur $\mathbb{R}^2$.

Problème II (d'après Centrale PSI 2013)

Le but du sujet est d'étudier l'exponentielle de matrices, réelles ou complexes. Dans tout le sujet, p désigne un entier naturel non nul. Si $\mathbb{K}$ désigne un coprs, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on adopte les notations suivantes.

- $M_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- I_p est la matrice identité de $M_p(\mathbb{K})$.
- Une matrice $A \in M_p(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$.
- $GL_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_p(\mathbb{K})$.
- On note Tr l'application trace et det l'application déterminant.
- $O_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'ordre p.
- $SO_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $O_p(\mathbb{R})$ de déterminant 1.
- On munit $M_p(\mathbb{K})$ de la norme quadratique $\|.\|_2$ définie par

$$\forall A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}\in M_p(\mathbb{K}),\ \|A\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|^2}=\sqrt{\mathrm{Tr}({}^t\overline{A}A)}$$

  et on munit $M_p(\mathbb{K})$ de la structure d'espace vectoriel normé associé.
- Si $A \in M_p(\mathbb{K})$, on note u_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à la matrice A et, par abus de notation, $\ker(A) = \ker(u_A)$.
- Si $A \in M_p(\mathbb{K})$ on définit, lorsque cette limite existe, $E(A) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(I_p + \dfrac{1}{n}A\right)^n$.

  (C'est-à-dire lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty}\|E(A) - \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n\|_2 = 0$.)
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique d'espace euclidien.

Partie A Question préliminaire.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n.
2. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.
3. Montrer qu'une suite de matrices $\left(A_n = (a_{i,j}(n))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B = (b_{i,j})$ si et seulement si,toutes les suites $\left(a_{i,j}(n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ des coefficients des matrices convergent vers $b_{i,j}$ lorsque p tend vers $+\infty$.
   (On rappelle que $\left(A_n = (a_{i,j}(n))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $B = (b_{i,j})$ lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} \|B - A_n\|_2 = 0$.)

Partie B Matrices antisymétriques réelles d'ordre.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer un nombre $\beta_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\dfrac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \dfrac{1}{n}A\right) \in SO_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer un nombre réel θ_n tel que $\dfrac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \dfrac{1}{n}A\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$.
4. En déduire que $E(A)$ existe et que c'est une matrice de rotation, dont on précisera l'angle.

Partie C Matrices antisymétriques d'ordre 3.

Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. (a) Montrer que $\det(B) = 0$.
   (b) Montrer que $(\ker(u_B))^\perp$ est stable par u_B.
   (c) En déduire que B est de rang 0 ou 2.
2. Montrer qu'il existe une matrice P de $O_3(\mathbb{R})$ et un réel β tels que $B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
3. Montrer que lorsque l'égalité de la question précédente est vérifiée, on a $|\beta| = \dfrac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$.
4. Montrer que $E(B)$ existe et est une matrice de rotation.
   Préciser la valeur de son angle non orienté en fonction de $\|B\|_2$.

Problème III

Soit $E = \mathbb{R}^3$ un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 3 sur le corps de réels. On considère l'espace vectoriel produit $\mathbb{R} \times E$, de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, dont les éléments sont des couples $(x, \overrightarrow{U})$ où x est un réel et $\overrightarrow{U}$ un vecteur de E. On définit sur $\mathbb{R} \times E$ une multiplication par :

$$(x, \overrightarrow{U})(y, \overrightarrow{V}) = (xy - \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}, x\overrightarrow{V} + y\overrightarrow{U} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V})$$

pour tous réels x et y, pour tous vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ de E, où $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$ désignent respectivement le produit scalaire et la produit vectoriel de $\overrightarrow{U}$ par $\overrightarrow{V}$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R} \times E$ muni de la multiplication est noté $\mathbb{H}$ et ses éléments sont appelés *quaternions.*

Partie A Le corps des quaternions

1. Montrer que la multiplication sur $\mathbb{H}$ a pour élément neutre $e = (1, \vec{0})$.
2. Déterminer les quaternions $q = (x, \overrightarrow{U})$ tels que $q^2 = e$, puis ceux tels que $q^2 = -e$.
3. Soit $\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}$ trois vecteurs de E et $i = (0, \overrightarrow{I})$, $j = (0, \overrightarrow{J})$ et $k = (0, \overrightarrow{K})$ trois quaternions associés à ces vecteurs.
   (a) Montrer que $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est une base orthonormale directe de E si et seulement si $\begin{cases} i^2 = j^2 = -e \\ ij = k \end{cases}$
   (b) lorsqu'il en est ainsi, vérifier que $ji = -k$ et calculer k^2, jk, kj, ki, ik.
   Vérifier les cinq égalités : $i^2i = ii^2,\ i^2j = i(ij),\ (ij)i = i(ji),\ (ij)j = ij^2,\ (ij)k = i(jk)$.
   (c) `[Question hors barème]` En déduire sans autre calcul que la multiplication de $\mathbb{H}$ est associative.
   (On pourra utiliser le fait (évident) que la multiplication est une forme bilinéaire de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$).
4. Étant donné un quaternion $q = (x, \overrightarrow{U})$, déterminer les quaternions $r = (y, \overrightarrow{V})$ tels que $rq = qr$.
   En déduire que les quaternions q tels que $rq = qr$ pour tout quaternion r ; ces quaternions sont dits *réels.*
5. Montrer que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ possède un inverse pour la multiplication.

On a montré que l'addition et la multiplication de $\mathbb{H}$ lui confèrent la structure de corps (non commutatif).

Partie B Une conjugaison dans $\mathbb{H}$

À tout quaternion $q = (x, \overrightarrow{U})$ on associe son *conjugué* $\overline{q} = (x, -\overrightarrow{U})$ et le réel $N(q) = x^2 + \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U}$.

1. Vérifier que les quaternions égaux à leur conjugué sont les quaternions réels.
   Les quaternions opposés à leur conjugué, c'est à dire de la forme $(0, \overrightarrow{U})$ sont dits *purs.*
2. Exprimer les produits $q\overline{q}$ et $\overline{q}q$ en fonction de $N(q)$.
3. Exprimer le conjugué $\overline{qr}$ du produit qr de deux quaternions q et r quelconques en fonction des conjuguées $\overline{q}$ et $\overline{r}$. En déduire $N(qr)$ en fonction de $N(q)$ et $N(r)$.
4. Montrer que les quaternions q tels que $N(q) = 1$ forment un groupe pour la multiplication des quaternions. Ce groupe sera noté S dans toute la suite.
5. Montrer que pour tout quaternion q non nul il existe un unique couple (ρ, u) où ρ est un réel positif et u un quaternion de S tel que $q = \rho u$.

Partie C Une structure euclidienne de $\mathbb{H}$

On définit sur $\mathbb{H}$ la forme bilinéaire $(\cdot \mid \cdot)$ par $\Big((x, \overrightarrow{U}) \mid (y, \overrightarrow{V})\Big) = xy + \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}$.

1. Démontrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{H}$.
2. Montrer que l'application $q \mapsto \sqrt{N(q)}$ de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}$ est la norme euclidienne associée à $(\cdot \mid \cdot)$.
3. Soit q, r deux quaternions. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (i) q et r sont orthogonaux ;
   (ii) le produit qr est un quaternion pur ;
   (iii) $qr + rq = 0$.