I Définitions

Définition 1 Donner la définition d'une fonction convexe f sur un intervalle I et une caractérisation dans les cas où la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^2$ sur I.

Définition 2 Donner le domaine de défintion, de dérivabilité, la dérivée et un tracé de la fonction arcsin.

Définition 3 Donner les définitions quantifiées de

1. f est continue sur I :

2. f est u-continue sur I :

3. f est k-lipschitzienne sur I :

Définition 4 Donner les défintions quantifiées de

1. f est une injection de E dans F :

2. f est une surjection de E sur F :

Donner une caractérisation à l'aide de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ dans le cas où E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 5 Donner la définition quantifiée de $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ ainsi qu'une caractérisatios à l'aide d'une fonction ϵ.

Définition 6 Donner la défintion de α est une racine d'ordre r du polynôme P et en donner une caractérisation à l'aide des dérivées successives de P.

II Démonstrations

Q1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et V un sous-espace vectoriel de F. Démontrer que $f^{-1}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Q2. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, résolution de l'équation $(E) : ax + by = c$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Q3. Démontrer que tout polynôme P tel que $\deg(P) \leqslant n$ peut s'écrire $P(X) = Q(X+1) - Q(X)$, avec $\deg(Q) \leqslant n+1$.

Q4. Énoncer et démontrer l'inégalité arithmético-géométrique.

Q5. Écrire une procédure Maple qui détermine par dichotomie une valeur approchée à `eps` près d'une fonction continue.

Q6. Démontrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé simple, alors P' l'est aussi.

III Calculs

Seul les résultats sont pris en compte.

Calcul 1 Déterminer les racines du polynôme : $P(z) = z^2 + (3 - 3i)z - 9i$.

Réponse 1

Calcul 2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$.

Réponse 2

Calcul 3 Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \ln(1 + 3x) \times (1 + 2x)^{1/3}$.

Réponse 3

Calcul 4 Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de $f : x \mapsto \arctan(\ln(3 + 2x)) \times \operatorname{ch}(\sqrt{x})$.

Réponse 4

Calcul 5 Déterminer l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D} = (AB)$ passant par les points $A(2, 1)$ et $B(0, -1)$ déterminer la distance de $C(1, 3)$ à $\mathcal{D}$.

Réponse 5

Calcul 6 Déterminer les asymptotes (en $+\infty$ et $-\infty$), ainsi que les positions relatives de la courbe : $M(t) \begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{t^2+t+1} \\ y(t) = \frac{t^2-2t}{t-1}. \end{cases}$

Réponse 6