

## I Définitions

**Définition 1** Donner la définition d'un point singulier d'un arc paramétrés plan et expliquer comment en faire l'étude.

**Définition 2** Énoncer les théorèmes de division euclidienne dans  $\mathbb{Z}$  et dans  $\mathbb{K}[X]$ .

**Définition 3** Définir ce qu'est la borne supérieure d'un ensemble de réel.  
En donner une condition d'existence et une caractérisation « en  $\varepsilon$  ».

**Définition 4** Énoncer les formules d'égalité (une avec un «  $\exists c$  » l'autre avec un reste intégral) de Taylor-Lagrange.

**Définition 5** Donner la formule donnant le déterminant à l'aide de permutations. Expliquer les termes utilisés.

**Définition 6** Énoncer la formule de changement de bases pour les endomorphismes et celle pour les vecteurs. Expliciter les matrices utilisées.

## II Démonstrations

**Q1.** Démontrer que  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $F$  si, et seulement si, il existe  $g$  de  $F$  dans  $E$  telle que  $g \circ f = \text{Id}_E$  et  $f \circ g = \text{Id}_F$ .

**Q2.** Formule de Bernoulli ( $x^n - y^n = \dots$ ) dans un anneau, énoncé et démonstration.

**Q3.** Énoncer et démontrer l'approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier.

**Q4.** Démontrer qu'une forme  $n$ -linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

**Q5.** Limite en  $a \in \mathbb{R}$  du produit  $f(x) \times g(x)$  dans le cas où  $g$  est majorée par un réel  $m < 0$  au voisinage de  $a$  et  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$ .

**Q6.** Énoncé et démonstration du théorème de l'égalité des accroissements finis.

### III Calculs

Seul les résultats sont pris en compte.

**Calcul 1** Calculer de  $A^n$  pour  $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .

**Réponse 1**

**Calcul 2** calculer  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} e^{i \frac{2k\pi}{3}}$ .

**Réponse 2**

**Calcul 3** Résoudre (E)  $y'' - y' - 6y = 10xe^{-2x}$ .

**Réponse 3**

**Calcul 4** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  Calculer  $\det(A)$  puis  $A^{-1}$  si cela est possible.

**Réponse 4**

**Calcul 5** Calculer le D.L. en 0 à l'ordre 4 de  $\ln(\cos^2(x))$ .

**Réponse 5**

**Calcul 6** Combien peut-on former de nombres de 9 chiffres distincts avec les chiffres de 1 à 9 et tels que les chiffres 7, 8, 9 se suivent, dans un ordre quelconque? (on note la réponse  $n_1 = \dots$ )

Combien peut-on former de nombres de 9 chiffres distincts avec les chiffres de 1 à 9 et tels que les chiffres 7, 8, 9 se suivent, dans un ordre fixé? (on note la réponse  $n_2 = \dots$ )

**Réponse 6**