Le but de ce T.D. est d'apprendre à résoudre *de façon systématique* les *systèmes linéaires*. La méthode du pivot de Gauss sera reprise plus tard dans le cours, lorsque nous aurons étudié l'algèbre linéaire, qui est son cadre naturel.

I. La méthode

Un système linéaire (S) est la donnée de n équations (notées (L_1), ..., (L_n)) à p inconnues (notées x_1, ..., x_p), où $n, p \in \mathbb{N}^*$. Par exemple ($n = 3$, $p = 4$) :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lrcrcrcrcl} (L_1) & 3\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ (L_2) & x_1 & - & x_2 & - & 2\,x_3 & & & = & 4 \\ (L_3) & 2\,x_1 & + & x_2 & & & + & 3\,x_4 & = & 2 \end{array} \right.$$

Remarque : (L_2) et (L_3) sont bien des équations à 4 inconnues !

I.1 Le principe :

1. N'effectuer que des opérations élémentaires sur les lignes. Ces opérations sont :
   - la permutation de deux lignes ;
   - la multiplication d'une ligne par une constante ;
   - ajouter à une ligne une autre, multipliée par une constante.
2. Mettre un pivot (un « 1 ») en haut à gauche.
3. À l'aide de ce pivot, annuler dans toutes les lignes suivantes les coefficients « en x_1 » .
4. Recommencer en ne considérant plus la 1ère ligne, jusqu'à obtenir un système triangulaire supérieur.
5. Résoudre.

I.2 Exemple

Résolvons le système S définit plus haut. Voilà une possibilité :

1. $L_1 \leftrightarrow L_2$;
2. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$;
3. $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$;
4. $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{4}L_2$;
5. $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$.

Nous aboutissons au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & 2\,x_3 & & & = & 4 \\ & & x_2 & + & \dfrac{5}{4}\,x_3 & - & \dfrac{1}{4}x_4 & = & -\dfrac{11}{4} \\ & & & & \dfrac{1}{4}x_3 & + & \dfrac{15}{4}\,x_4 & = & \dfrac{9}{4} \end{array} \right. \quad \text{soit encore} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 4 + 2\,x_3 + x_2 \\ x_2 & = & -\dfrac{11}{4} + \dfrac{1}{4}x_4 - \dfrac{5}{4}\,x_3 \\ x_3 & = & 9 - 15\,x_4 \end{array} \right.$$

Ce qui nous donne l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de (S) :

$$\mathcal{S} = \{(8 - 11\lambda; -14 + 19\lambda; 9 - 15\lambda; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

c'est à dire : $x_1 = 8 - 11\lambda$, $x_2 = -14 + 19\lambda$, $x_3 = 9 - 15\lambda$ et $x_4 = \lambda$ où λ est en quelque sorte un « degré de liberté » .

II. Exercices

Exercice 1 Résoudre les systèmes linéaires suivants (*Discuter éventuellement en fonctions des valeurs des réels a, b et c*) :

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & - & 5y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & a \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & b \\ 4x & - & 5y & - & 3z & = & c \end{array}\right.$$

$$(S_3)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_4)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ 2x & + & y & + & z & = & b \\ 3x & - & y & - & z & = & c \end{array}\right.$$

$$(S_5)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_6)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & 3t & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & z & - & t & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & - & 4t & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & z & - & 2t & = & a \end{array}\right.$$

$$(S_7)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2ix & + & (1+i)y & - & z & = & 2 \\ x & - & iy & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & (2-i)z & = & 0. \end{array}\right.$$

(*Ici, implicitement, x, y et z sont complexes.*)

$$(S_8)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & u & = & 13 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3u & = & 25 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4u & = & 2 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & 13 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 23t & + & 9u & = & 84 \end{array}\right.$$

Exercice 2 Discuter et résoudre le système linéaire suivant (avec a, b deux réels) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & a^2z & = & 1 \\ x & + & ay & + & abz & = & a \\ bx & + & a^2y & + & a^2bz & = & a^2b \end{array}\right. .$$

Exercice 3 Soit $n \geqslant 2$. On considère des n-uplets $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $(\gamma_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Discuter et résoudre le système

$$(S)\quad \forall i \in [\![1;n]\!],\ \sum_{k=1}^{n}(\alpha_i-\beta_k)x_k = \gamma_i.$$

Exercice 4 Discuter et résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x_2 & = & ax_1 & +b \\ x_3 & = & ax_2 & +b \\ & & \cdots & \\ x_n & = & ax_{n-1} & +b \\ x_1 & = & ax_n & +b \end{array}\right. ,$$

avec a, b deux complexes.

Exercice 5 Soient $M_1, \ldots, M_n$ des points du plan, 2 à 2 distincts. Déterminer tous les polygones $A_1, \ldots A_n$ tels que, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, M_j soit le milieu de $[A_j, A_{j+1}]$, et M_n soit le milieu de $[A_n, A_1]$.