Le but est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein :

Théorème (Cantor-Bernstein) *Soient E et F des ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E sur F.*

1. Soient E un ensemble et $G : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application croissante (pour toutes parties A et B de E, $A \subset B \Rightarrow G(A) \subset G(B)$) .

   Posons $S = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset G(A)\}$ et $M = \bigcup_{A \in S} A$.

   (a) Montrer que $M \in S$.
   En déduire que M est le plus grand élément de S.

   (b) Montrer que $G(M) \in S$.
   En déduire que $G(M) = M$. En déduire le

   Lemme *Soient E un ensemble et $G : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application croissante .*
   Alors G admet un point fixe (il existe $M \subset E$ telle que $G(M) = M$).

2. Revenons au théorème de Cantor-Bernstein et supposons que f est une injection de E dans F et que g est une injection de F dans E.
   Définissons l'application $G : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ par $G(A) = E \backslash (g(F \setminus f(A)))$.

   (a) Justifier que G est croissante. Notons M un point fixe de G. Vérifier que M et $R = g(F \setminus f(M))$ sont complémentaires dans E.

   (b) Justifier que la restriction h de g à $F \setminus f(M)$ est une bijection de $F \setminus f(M)$ sur R.

   (c) Définissons l'application φ de E dans F par

   $$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in M \\ h^{-1}(x) & \text{si } x \notin M \end{cases} .$$

   Démontrer que φ est une bijection de E sur F et conclure.