# LIVRET D'EXERCICES

# MPSI1 2012/2013
# LYCÉE CHAPTAL

## Table des matières

# 0 Gammes

## 0.1 Calculs algébriques

**Exercice 1** Rappeler les identités remarquables de degré 2 et en déduire que pour tous réels $a$ et $b$,

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

En déduire, si $a$ et $b$ sont positifs, que $2\sqrt{ab} \leqslant a+b$.

**Exercice 2** Démontrer les inégalités, pour tous nombres réels positifs $a$, $b$ et $c$ :

**a.** $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$ ; **b.** $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$ ; **c.** $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant (\dfrac{a+b}{2})^2$.

**Exercice 3**

1. Démontrer que pour tout réel $a > 0$, $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$.
2. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vérifiant $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, on a

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

**Exercice 4** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a^2+b^2 = 1 = c^2+d^2$. Montrer que $|ac+bd| \leqslant 1$.

**Exercice 5** Soient $x, y > 0$ des réels. Démontrer que $\dfrac{x^3}{y} + \dfrac{y^3}{x} \geqslant x^2+y^2$.

**Exercice 6** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$. Démontrer que $ac+bd \geqslant ad+bc$.

**Exercice 7** Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que : $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$.

**Exercice 8** Développer et factoriser les expressions algébriques suivantes :

**a.** $A_1(x) = 25x^2 + (5x-3)(2x+7) - 9 + (6-10x)(x-3)$ ;
**b.** $B_1(x) = 5(x^2-4) - x^2 + 4x - 4 + (6-3x)(x+3)$ ;
**c.** $C_1(x) = 3(x-1)^2 - x^2 + 1 + (x-1)(x+2)$ ;
**d.** $D_1(x) = (4x-1)^2 - 9(3-x)^2$.

**Exercice 9** Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

**a.** $A_2(x) = \dfrac{x}{x+3} - \dfrac{3}{x-3} + \dfrac{18}{x^2-9}$ ;
**b.** $B_2(x) = \dfrac{x^2}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} - \dfrac{4}{(x-1)(x-2)}$ ;
**c.** $C_2(x) = \dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{2x+3}{x-2} - \dfrac{16}{x^2-4} - 3$ ;
**d.** $D_2(x) = \dfrac{1}{x^2-x} + \dfrac{1}{x^2+x} - \dfrac{2}{x^2-1}$.

**Exercice 10** Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

**a.** $(E_1)$ $\dfrac{x-1}{x+3} - 3 = \dfrac{16}{(x-1)(x+3)} - \dfrac{2x+5}{x-1}$ ;
**b.** $(E_2)$ $8x^3 - \sqrt{x^3} = 0$ ;
**c.** $(E_3)$ $\dfrac{2x+1}{x^2+x} + \dfrac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{x^2+4x+2}{x^2+2x}$ ;
**d.** $(E_4)$ $2\sqrt{x^2+4x+5} = x+3+\sqrt{x^2-1}$.

## 0.2 Trigonométrie

**Exercice 11** Résoudre les équations et inéquations suivantes :

**a.** $\sin(3x - \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ ;
**b.** $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(x)$ ;
**c.** $\tan(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ ;
**d.** $\sin(2x + 3) = \frac{1}{2}$ ;
**e.** $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 3 - \sin(\frac{x}{2})$ ;
**f.** $\sin(\frac{\pi + x}{2}) = \frac{1}{2}$ ;
**g.** $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$ ;
**h.** $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$ ;
**i.** $\sqrt{3}\cos(x) \leqslant 3\cos(\frac{\pi}{2} + x)$.

**Exercice 12** Retrouver, par le calcul, les formules fonctionnelles des fonctions trigonométriques (§ 4 du formulaire).

**Exercice 13** Calculer, à l'aide de radicaux et de deux façons différentes, les nombres $\tan(\frac{\pi}{12})$ et $\cos(\frac{\pi}{12})$.

**Exercice 14** « *La transformation de $a\cos t + b\sin t$.* »
Soient $a$ et $b$ deux réels non nuls tous les deux (i.e l'un des deux au moins n'est pas nul).
Montrer qu'il existe un réel $\varphi \in [-\pi, \pi]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(t - \varphi).$$

**Exercice 15** Résoudre les équations :

**a.** $\cos 2x + \cos x = 0$ ;
**b.** $\sin x + \cos 3x = 0$ ;
**c.** $\sin 5x - \sin x = 0$.

**Exercice 16** Résoudre l'équation $\sqrt{3} + \tan x = 1 - \sqrt{3}\tan x$.

**Exercice 17** Résoudre l'équation d'inconnues $x$ et $y$ :

$$\sin(x + y) = \sin(x) + \sin(y).$$

*<u>indication :</u> on poura penser que $x + y = \frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}$ et utiliser les transformations de sommes en produits.*

**Exercice 18** Résoudre les équations :

**a.** $\sin(x)\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin^2(x)$ ;
**b.** $\cos(4x - \frac{\pi}{4}) + \sin^2(x) - \cos^2(x) = 0$ ;
**c.** $\cos(2x) - \cos(8x) - \sin(4x) - \sin(6x) = 0$ ;
**d.** $\tan(2x) = 3\tan(x)$.

## 0.3 Un peu de logique

**Exercice 19** Soit $p$ et $q$ des assertions.
En utilisant des tables logiques, démontrer les théorèmes suivant :

1. non $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (p$ et ( non $q))$ ;
2. (( non $p) \Leftrightarrow$ ( non $q)) \Longleftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ ;
3. $(p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ ;
4. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Longleftrightarrow ((p$ et $q) \Rightarrow r)$ ;
5. $((p$ ou $q) \Rightarrow r) \Longleftrightarrow ((p \Rightarrow r)$ et $(q \Rightarrow r))$ ;
6. $((p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow p)) \Longleftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

# 1 Nombres Complexes

**Exercice 1** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
2. $w^6 = -1$ ;
3. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

**Exercice 2** Écrire sous forme trigonométrique ($\theta \in R \setminus 2\pi.\mathbb{Z}$) :

1. $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ ;
2. $z = 1 + i\tan(\theta)$. En déduire $(1+i\sqrt{3})^{12}$.
3. $z = \dfrac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)-i\sin(\theta)}$. En déduire $z^n$ pour tout naturel $n$.
4. $z = \dfrac{1+\cos(a)+i\sin(a)}{\sqrt{1+\sin(2a)}+i\sqrt{1-\sin(2a)}}$.

**Exercice 3** Soit $x$ un réel, $x \neq 0 \bmod \pi$.

1. Linéariser $\cos^7 x$.
2. Calculer : $\dfrac{\sin(7x)}{\sin x}$.

**Exercice 4**

1. Montrer que pour tout réel $x$, $\left|e^{ix}-1\right| \leqslant |x|$.
   *Indication : on rappelle (le démontrer !) que pour tout réel $x$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.*
2. En déduire que pour tout complexe $z$ d'argument principal $\theta$, on a $|z-1| \leqslant ||z|-1| + |z||\theta|$.
   Quelle est l'interprétation géométrique de cette inégalité ?

**Exercice 5**

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que si $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} - nz^n = 0$, alors $|z| \leqslant 1$.
   *Indication : on pourra raisonner par l'absurde en supposant que $|z| > 1$ et en comparant les puissances de $|z|$. Penser à utiliser convenablement une inégalité triangulaire. Remarquer également que pour une fois, utiliser la somme des termes d'une suite géométrique n'est pas une bonne idée...*
2. Soient $(z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n$.
   Démontrer que $(|z_1 + \ldots z_n| = |z_1| + \ldots |z_n|) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{C}, \forall j \in \{1 \ldots n\}, \exists \rho_j \geqslant 0, z_j = \rho_j z)$.

**Exercice 6** Soit $\theta$ un réel, $\theta \in [0; 2\pi[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue $z$ : $z^2 - (2^{\theta+1}\cos(\theta))z + 2^{2\theta} = 0$.
   Donner chaque solution sous forme trigonométrique.
2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, considérons les points $A$ et $B$ dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.
   Déterminer $\theta$ de manière à ce que $OAB$ soit un triangle équilatéral.

**Exercice 7** Le but de l'exercice est de trouver tous les ensembles de trois complexes $\{u, v, w\}$ de même module tels que $u + v + w = uvw = 1$.

1. On se donne trois complexes $u$, $v$ et $w$ ayant les propriétés recherchées.
   (a) Montrer que tous les complexes sont de module 1.
   (b) Posons $Z = uv + uw + vw$. En calculant $Z\overline{uvw}$, en déduire $Z$.
   (c) En utilisant les relations coefficients-racines, déterminer un polynôme $P$ de degré 3 de racines $u, v, w$.
   (d) En déduire le résultat.
2. Conclure.

**Exercice 8** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Ainsi que $A = (1+1)^n$, $B = (1+j)^n$ et $C = (1+\overline{j})^n$.

1. Placer $1, j, \overline{j}, j^2$ sur un dessin.
2. Déterminer le module et l'argument principal de $1+j$ et de $1+\overline{j}$. En déduire $B$ et $C$.
3. Développer $A$, $B$ et $C$ par la formule du binôme de Newton.

4. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $A+B+C$, $A+jB+\overline{j}C$ et $A+\overline{j}B+jC$.
5. Déterminer des formules sommatoires pour $R = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{3})} \binom{n}{3k}$, $S = \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{3})} \binom{n}{3k+1}$ et $T = \sum_{k=0}^{E(\frac{n-2}{3})} \binom{n}{3k+2}$.

**Exercice 9** Soit $t$ un nombre réel.

1. Exprimer $d = \sin^2(t) - 2(1-\cos(t))$ à l'aide de $\sin(\frac{t}{2})$. Déterminer les racines carrées de $d$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ $2z^2(1-\cos(t)) - 2z\sin(t) + 1 = 0$.
   Préciser, suivant le signe de $\sin(\dfrac{t}{2})$, le module et un argument de chacune des solutions.
3. Supposons que $t \in ]0;2\pi[$ et notons $\omega$ la solution de l'équation précédente dont un argument est $\dfrac{t}{2}$. Calculer $\omega^2$ ; donner sa forme cartésienne $x+iy$, son module $r$ et l'un de ses arguments $\theta$. Montrer que $r = x + \frac{1}{2}$.

**Exercice 10** Soit $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Que vaut $\alpha^5$ ?

1. Calculer $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
2. Montrer que $(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^3+\alpha+1)(\alpha^4+\alpha+1) = \alpha(\alpha+1)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la partie imaginaire de $(\alpha^2+\alpha+1)^n$.
   *Indication : penser à mettre en facteur* $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ *dans* $\alpha^2+\alpha+1$.

**Exercice 11** Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par $f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$.

1. Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout nombre complexe $z$ on ait $f(z) = (z^2+4)(z^2+az+b)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ les images $A, B, C, D$ des solutions de l'équation précédente, puis montrer que ces points sont sur un même cercle $(C)$ dont on précisera le centre et le rayon.

**Exercice 12 (Des équations bicarées)** Nous voulons résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4+2z^2+4=0$.

1. Essayons d'abord de procéder comme nous le ferions dans $\mathbb{R}$, c'est à dire résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système :
$$\begin{cases} \omega^2 = z \\ \omega^2 + 2\omega + 4 = 0. \end{cases}$$
   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\omega^2+2\omega+4=0$.
   Déterminer le module et un argument de chacune des solutions $\omega_1$ et $\omega_2$ de cette équation.
   (b) Déterminer le module et un argument de chacune des solutions des équations $z^2=\omega_1$ et $z^2=\omega_2$.
   (c) Conclure sur les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4+2z^2+4=0$.
2. Il se trouve que dans $\mathbb{C}$, la résolution peut se faire plus simplement. Voici comment.
   (a) i. Vérifier que $z^4+4 = (z^2+2)^2 - 4z^2$.
   ii. En déduire une factorisation de $z^4+2z^2+4$, puis la résolution dans $\mathbb{C}$ de $z^4+2z^2+4=0$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4+10z^2+169=0$.

**Exercice 13** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$. Calculer (i.e. simplifier), en fonction de $n$ et de $a$, les expressions :
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^k(a)\cos(ka)\,, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^k(a)\sin(ka) \quad \text{et} \quad C_n = A_n + iB_n.$$

**Exercice 14** Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, considérons l'équation : $(E)$ : $z^2 - (2+i\alpha)z + i\alpha + 2 - \alpha = 0$.

1. Montrer qu'il existe une valeur de $\alpha$ pour laquelle les deux racines de $(E)$ sont complexes conjuguées.
2. Supposant le cas précédent vérifié,
   (a) calculer les solutions,
   (b) donner leur module et argument.

**Exercice 15** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mid a \mid = 1$.

1. Écrire $a$ sous forme trigonométrique.
2. Donner les racines de l'équation $z^n = a$.
3. Si $z$ est une racine de $z^n = a$, notons $M(z)$ le point du plan d'affixe $(1+z)^n$.
   Démontrer que tous les $M(z)$ pour $z$ racine de $z^n = a$ sont situés sur une même droite passant par l'origine $O$ d'affixe $z_O = 0$.

**Exercice 16**

1. Rappeler la liste des racines septièmes de l'unité.
2. Soit $\alpha$ une racine septième de l'unité différente de 1. Calculer $\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2} + \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \dfrac{\alpha^3}{1+\alpha^6}$.

**Exercice 17 ( Noyau de Dirichlet[1])** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\,[2\pi]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

**Exercice 18** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(z + \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(z^n+1)$.

**Exercice 19** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1. $\left(\dfrac{\sqrt{3}\,z+1}{2\,z}\right)^2 + \left(\dfrac{2\,z}{\sqrt{3}\,z+1}\right)^2 = 1$
2. $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$.
3. $z^3 = \left(\dfrac{1+i\,a}{1-i\,a}\right)$, $a \in \mathbb{R}$
4. $\left(\dfrac{1+i\,z}{1-i\,z}\right)^n = a,\ a \in \mathbb{C}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\left(\dfrac{i-z}{i+z}\right)^k = 0$

**Exercice 20** Soient A et B deux points d'affixes respectives $z$ et $w$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(O, A, B)$ soit un triangle rectangle isocèle en A (resp. équilatéral).

**Exercice 21**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq -1$. Posons $Z = \frac{2iz-i}{z+1}$.

1. Calculer $\overline{Z}$, $\Re(Z)$, $\Im(Z)$ et $|Z|$ en fonction de $x$ et $y$.
2. Déterminer l'ensemble $E_1$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|Z| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble $E_2$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $Z$ soit imaginaire pur.
4. Déterminer les affixes des points d'intersections de $E_1$ et $E_2$.

**Exercice 22** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que :

1. les points d'affixe $i, z, iz$ soient alignés
2. les points d'affixe $1, z, iz$ soient les sommets d'un triangle équilatéral
3. les points d'affixe $1, z, 1+z^2$ soient alignés

[1] Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), mathématicien allemand

# 2 Structures générales

## 2.1 Ensembles

Dans tous les exercices suivants E,F, ... sont des ensembles et A, B, C, ... sont des parties de E.

**Exercice 1** Montrer que :

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C$ ;
3. $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$ ;
4. $(A \cup B = A \cap C) \Leftrightarrow (B \subset A \subset C)$ ;
5. $(A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow (A \cap C_E(B) = A \cap C_E(C))$.

**Exercice 2** Est-ce que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$ ? Est-ce que $\mathcal{P}(E \cup F) \subset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ ?

**Exercice 3** Si $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on note leur *différence symétrique* par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Démontrer que $C_E(A) \Delta C_E(B) = A \Delta B$.
2. Démontrer que : $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$.
3. Montrer l'équivalence : $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$.
4. Soit $\mathcal{B}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$. Montrer l'équivalence entre les énoncés :
   (i) $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $(A \Delta B \in \mathcal{B}$ et $A \cap B \in \mathcal{B})$ ;
   (ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $(A \Delta B \in \mathcal{B}$ et $A \cup B \in \mathcal{B})$ ;
   (iii) $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $(A \cup B \in \mathcal{B}$ et $A \setminus B \in \mathcal{B})$.

**Exercice 4** Montrer que :

1. $(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G)$ .
2. $(E \times F) \cup (G \times F) = (E \cup G) \times F$ .
3. $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$ .

**Exercice 5** On pose $E = [-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 4\}$ et $F = [0, 6] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 6\}$.

1. Représenter sur un même dessin (dans le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) les ensembles $C_{E \times F}(A \times B)$ et $C_E(A) \times C_F(B)$ dans le cas où $A = [0, 3]$ et $B = [1, 2]$. Conclure.
2. Démontrer que $C_{E \times F}(A \times B) = (C_E(A) \times F) \cup (E \times C_F(B))$.

**Exercice 6** Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. Montrer que :

$$C_E\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} C_E(A_i) \qquad , \qquad C_E\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} C_E(A_i).$$

## 2.2 Relations Binaires

**Exercice 7** Soit A une partie d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ Montrer (s'il existe) l'unicité du plus petit élément de A.

**Exercice 8** Soit E un ensemble avec, au moins, deux éléments distincts $a \neq b$ . On considère l'ordre inclusif sur $\mathcal{P}(E)$ (i.e. l'ordre induit par l'inclusion $\subset$). On pose : $\boldsymbol{A} = \{ \{a\} , \{b\} \}$ .

1. Trouver un minorant et un majorant de $\boldsymbol{A}$.
2. Montrer que $\boldsymbol{A}$ ne possède ni maximum ni minimum.

**Exercice 9** Montrer que la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}(E)$, $A \,\mathcal{R}\, B \Leftrightarrow (A = B$ ou $A = C_E(B))$ est une relation d'équivalence.

**Exercice 10** On définit la relation $\leqslant_T$ sur $\mathbb{R}^2$ par : $(x, y) \leqslant_T (x', y')$ si et seulement si $\mid x - x' \mid \leqslant y' - y$.

**1.** Démontrer que $\leqslant_T$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$, on note $M(\mathcal{A})$ (*resp* $m(\mathcal{A})$) l'ensemble des majorants (*resp* des minorants) de $\mathcal{A}$ dans $(\mathbb{R}^2, \leqslant_T)$.

**2.** Soit $z = (x, y)$ et $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que

$$z \leqslant_T w \Longleftrightarrow (x + y - u - v \leqslant 0 \text{ et } x - y - u + v \geqslant 0).$$

Représenter sur un même dessin les ensembles $M(\{c\})$ et $m(\{c\})$ dans le cas où $c = (2, 1)$.

**3.** La relation $\leqslant_T$ est-elle une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$ ?

**4.** On pose maintenant $h = (2,1)$, $k = (6,2)$ et $\mathcal{H} = \{h,k\}$. Représenter sur un même dessin les ensembles $M(\mathcal{H})$ et $m(\mathcal{H})$. Démontrer (*en les déterminant*) que $\mathcal{H}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\left(\mathbb{R}^2, \leqslant_T\right)$.

**5.** Soit $a$ et $b$ des réels tels que $a \geqslant 0$. On pose $\alpha = (-a,b)$, $\beta = (a,b)$ et $\mathcal{A} = \{\alpha,\beta\}$. Représenter sur un même dessin les ensembles $M(\mathcal{A})$ et $m(\mathcal{A})$. Démontrer (*en les déterminant*) que $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\left(\mathbb{R}^2, \leqslant_T\right)$.

**Exercice 11** On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Montrer que toute partie de $\mathcal{P}(E)$ a une borne supérieure et une borne inférieure.
Á quelle condition une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ possède-t-elle un plus grand et un plus petit élément ?

## 2.3 Applications

**Exercice 12** Soit A une partie d'un ensemble E, soit B une partie d'un ensemble F et $f$ une application de $E$ dans $F$. Montrer que : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Y-a-t-il égalité ?

**Exercice 13** Soient $A, B$ deux parties d'un ensemble E. On rappelle que $\chi_A$ est la *fonction caractéristique de* $A$ et que $\tilde{1}$ est la fonction de $E$ constante en 1. Montrer que :

1. $\chi_{C_E(A)} = \tilde{1} - \chi_A$ ;
2. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \times \chi_B$ ;
3. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$ ;
4. $\chi_{A\setminus B} = \chi_A \times (\tilde{1} - \chi_B)$ ;
5. $(i) A \subset B$ équivaut à $(ii) \forall x \in E\ ,\ \chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$.

**Exercice 14** Soit $E$, $F$, $G$ des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Démontrer que :

**a.** Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.

**b.** Si $g \circ f$ est une surjection de $E$ sur $G$, alors $g$ est une surjection de $F$ sur $G$.

**Exercice 15** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2 - 2x + 2$.

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$. $f$ est-elle une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ ?
2. Déterminer $A = f([0,1])$. Déterminer $f^{-1}(A)$. $f$ est-elle injective ?
3. Déterminer $B = f^{-1}([0,2])$. Déterminer $f(B)$.

**Exercice 16** Soit les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ : $f : x \mapsto x+1$ et $g : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y = 0 \\ y-1 & \text{si} \quad y \geqslant 1 \end{cases}$.

1. Déterminer si $f$, $g$ sont des injections, des surjections ou des bijections de $\mathbb{N}$ dans (ou sur) $\mathbb{N}$.
2. Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

**Exercice 17**

1. Donner un exemple qui montre que si $f$ est une application de $E$ dans $F$, si $A$ est une partie de $E$ et si $a \in E$, l'énoncé « $(f(a) \in f(A)) \Rightarrow a \in A$ » est - en général - faux.
2. Démontrer que si $f$ est une injection de $E$ sur $F$, alors l'énoncé précédent est vrai pour toute partie $A$ de $E$ et tout élément $a$ de $E$.

**Exercice 18**

1. Montrer que la composée de deux applications croissantes est croissante.
2. L'application réciproque d'une bijection croissante est-elle nécessairement croissante ?

**Exercice 19** Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (x+y\ ,\ xy)$ .

1. Trouver une C.N.S. sur $(s,p) \in \mathbb{R}^2$ pour que $(s,p) \in f(\mathbb{R}^2)$ .
2. Déterminer $f^{-1}(B)$ pour $B = \{\ (s,p) \in \mathbb{R}^2\ /\ s^2 - 4p = 1\ \}$ .

**Exercice 20** Soient ( E, $\leqslant_E$ ) , ( F, $\leqslant_F$ ) des ensembles ordonnés, avec $\leqslant_E$ ordre total sur E et $f$ une application de $E$ dans $F$. Montrer les équivalences entre les énoncés :

1. (i) f est croissante et injective ;
   (ii) f est strictement croissante.
2. (i) f est constante ;
   (ii) f est à la fois croissante et décroissante.

Est-il nécessaire que l'ordre sur E soit total ?

**Exercice 21** L'application

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+y+z, x-y+z, x+y-z) \end{array}$$

est-elle une bijection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$ ? Si oui, quelle est $f^{-1}$ ?

**Exercice 22** Soit $f$ une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective. Montrer que $f^{-1}$ est impaire.
   *Remarque : on pourra ainsi montrer que arctan, arcsin, argth, argsh sont impaires en tant que réciproques de fonctions impaires.*
3. On suppose ici $f$ dérivable. Montrer que $f'$ est paire.
4. Imaginer un résultat analogue pour une fontion $g$ paire, dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 23** On considère $f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to \mathbb{N} \\ (n,m) & \to n+m. \end{cases}$ Déterminer $f(\mathbb{N} \times \{0\})$, $f(\mathbb{N}^2)$, $f(2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N})$, $f^{-1}(2\mathbb{N})$.

**Exercice 24** Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Montrer l'équivalence entre les énoncés :

(i) $f$ injective ;
(ii) $\forall X \in \mathcal{P}(E), f^{-1}\left(f(X)\right) = X$ ;
(iii) $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ ;
(iv) $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = \emptyset$ ;
(v) $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2, Y \subset X \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

**Exercice 25** Soient $E$ un ensemble et $p : E \to E$ une application telle que $p \circ p = p$.

1. Démontrer que si $p$ est une injection de $E$ dans $E$, alors $p = \mathrm{Id}_E$.
2. Démontrer que si $p$ est une surjection de $E$ sur $E$, alors $p = \mathrm{Id}_E$.

**Exercice 26** Soient $E$, $F$ des ensembles, $A \subset E$, $B \subset F$ et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Démontrer que $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.

**Exercice 27** Soient $E$ et $F$ des ensembles quelconques.

1. Montrer que s'il existe une injection de $E$ dans $F$ alors il existe une surjection de $F$ vers $E$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'injection de $\mathcal{P}(E)$ dans $E$.

**Exercice 28** Soit $E$ une ensemble muni d'une loi de composition interne associative $*$. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que :

$$\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ y = a * x * a.$$

Montrer que $E$ a un élément neutre pour cette loi.

# 3 fonctions usuelles

**Exercice 1** Calculer les intégrales $A = \displaystyle\int_0^\pi \cos^2(t)\ \mathrm{d}t$ , $B = \displaystyle\int_0^\pi \sin^2(t)\ \mathrm{d}t$ et $C = \displaystyle\int_0^\pi \cos^3(t)\ \mathrm{d}t$.

**Exercice 2** Montrer, de deux façons différentes (calcul direct et étude de fonctions) que :

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=0.$$

**Exercice 3** Calculer :

1. $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$ ;
2. $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)\right)$ ;
3. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)$.

**Exercice 4** Etudier la continuité et la dérivabilité de $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.
En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

**Exercice 5** Simplifier : $A = x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$ , $B = \dfrac{\mathrm{ch}\,(\ln(x)) + \mathrm{sh}\,(\ln(x))}{x}$ et $C = \mathrm{sh}^2(x)\cos^2(y) + \mathrm{ch}^2(x)\sin^2(y)$.

**Exercice 6** Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $a$,$b$ des réels, $b\neq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(a+kb)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{sh}(a+kb)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{ch}(kb)$.

**Exercice 7** Démontrer, de deux manières différentes, pour tout réel $x$ les égalité suivantes :

1. $\mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ;
2. pour $x\geqslant 1$, $\mathrm{argch}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

**Exercice 8** Montrer que pour tout réel $x$, $\arctan(e^x) - \arctan(\ \mathrm{th}(\dfrac{x}{2})) = \lambda$ et déterminer la constante $\lambda$.

**Exercice 9** Etablir les formules de « doublement de l'angle » pour les fonctions hyperboliques : $\mathrm{ch}(2a) = ...$

**Exercice 10** Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ ;
2. $g(x) = \sqrt{\dfrac{1-\arcsin(x)}{1+\arcsin(x)}}$ ;
3. $h(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

**Exercice 11** Soit $a>0$, $a\neq 1$. Montrer que $\log_a : x\mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ est la bijection réciproque de $\exp_a : x\mapsto a^x$.

**Exercice 12** On s'intéresse à l'application $\varphi : x\mapsto x\ln(x)$.

1. Faire l'étude de $\varphi$ (*domaine de définition, propriétés éventuellement évidentes ( parité, monotonie, périodicité, signe, etc. ), tableau de variations ( avec limites aux bornes ) et graphe.*)
2. Justifier que $\varphi$ établit une bijection de $[1/e;+\infty[$ sur $[-1/e;+\infty[$.
   On note $\varphi^{-1} : [-1/e,+\infty[\to [1/e;+\infty[$ son application réciproque. Donner $\varphi^{-1}(0)$.
3. Prouver que $\varphi^{-1}$ est dérivable sur $]-1/e,+\infty[$, et que pour $y\geqslant -\dfrac{1}{e}$, $(\varphi^{-1})'(y) = \dfrac{\varphi^{-1}(y)}{y+\varphi^{-1}(y)}$.
4. Donner une équation cartésienne C de la tangente $T_0$ au graphe de $\varphi^{-1}$ au point d'abscisse 0.
5. Application : soit $y\in\mathbb{R}$. Discuter, en fonction de $y$, du nombre de solutions de l'équation
   $(E) : x^x = y$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}^{+,*}$. On pourra utiliser l'étude de $\varphi$.

**Exercice 13** Prouver que $\arctan(2)+\arctan(3) = \dfrac{3\pi}{4}$.

**Exercice 14** Résoudre les équations d'inconnue réelle $x$ :
(1) $2^{x^3} = 3^{x^2}$, et (2) $2^x + 2^{x+1} + \cdots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \cdots + 3^{x+n}$, où $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 15**

1. Soit $f : x \mapsto \tan(\arccos(x))$. Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$ et montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}/x$.
2. Soit $g : x \mapsto \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$. Déterminer le domaine de définition $D_g$ de $g$.
   Montrer que $g(x) = \begin{cases} 2\arcsin(x) \text{ si } x \in [-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}] \\ -(2\arcsin(x)+\pi) \text{ si } x \in [-1; -1/\sqrt{2}] \\ -(2\arcsin(x)-\pi) \text{ si } x \in [1/\sqrt{2}; 1] \end{cases}$

**Exercice 16**

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
2. Montrer, de deux manières différentes, que pour tout $x > 0$, $\arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$ :
   (i) En utilisant le 1,
   (ii) En étudiant les variations d'une certaine fonction.

**Exercice 17** On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+i}\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de $I$ et prouver que $I = \dfrac{1}{2}\ln(2) - i\dfrac{\pi}{4}$.

**Exercice 18** Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

1. $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ ;
2. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-\arcsin(x)}{1+\arcsin(x)}}$ ;
3. $h : x \mapsto \arctan\sqrt{\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}$ ;
4. $m : x \mapsto \arctan(\operatorname{sh}(x))$.

**Exercice 19** Résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle $x$ : $\arccos(x) = \arcsin(1/3) + \arccos(1/4)$.

**Exercice 20**

1. Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(\operatorname{th}(x))$.
2. Montrer que $(1-\operatorname{th}^2)^{1/2} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}}$ et en déduire que $f' = 0$.
3. Pour quelle valeur de $x$ a-t-on $\operatorname{th}(x) = \dfrac{5}{13}$ ?
4. En déduire que $\arctan\left(\dfrac{5}{12}\right) + \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

**Exercice 21** Soit $f : x \mapsto \operatorname{argth}\left(\dfrac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}\right)$.
Justifier la définition de $f$sur $\mathbb{R}$ et démontrer que $f$ est une fonction affine

**Exercice 22 (sur la fonction coth)** On définit la fonction $\coth = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

1. Déterminer le domaine de définition et les variations de coth.
2. Montrer que pour tout réel $x$, $\operatorname{sh}(x) = 2\operatorname{ch}(x/2)\operatorname{sh}(x/2)$.
3. Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)} = \coth(x/2) - \coth(x)$.
4. En déduire pour tout $x \neq 0$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\operatorname{sh}(2^k x)}\right)$.

# 4 Équations différentielles linéaires

**Exercice 1** Résoudre les équations différentielles suivantes :

**a.** $y'(x) + y(x) = x^2 - 2x + 3$.

**b.** $(1-x)y'(x) + y(x) = \frac{x-1}{x}$.

**c.** $\sin(x)y'(x) + \cos(x)y(x) + 1 = 0$.

**d.** $y''(x) + y'(x) = 3 + 2x$.

**e.** $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^x$.

**f.** $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = (16x^2 + 16x - 14)e^{2x}$.

**Exercice 2** On cherche à trouver toutes les applications $f$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$(E) \qquad \forall x > 0, \quad f'(x) = f(\frac{1}{x}).$$

1. Soit $f$ une fonction vérifiant l'équation $(E)$.
   (a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer qu'alors $f$ vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 : $x^2 f''(x) + f(x) = 0$.
   Expliquer pourquoi les théorèmes vus en cours ne s'appliquent pas ici.
   (c) Définissons $z : t \mapsto z(t) = f(e^t)$.
      i. Démontrer que $z$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
      ii. Démontrer que $z$ est une solution de l'équation différentielle $(F) \qquad y'' - y' + y = 0$.
      iii. Résoudre $(F)$. En déduire $z$.
   (d) En déduire $f$.
2. Vérifier que toutes les fonctions obtenues au 1d sont solutions de $(E)$.

**Exercice 3** Considérons l'équation différentielle : $(E) \quad y'' + \alpha y = 0$, dans laquelle $\alpha$ est un paramètre réel.

1. Supposons ici $\alpha < 0$. Écrire la solution générale de l'équation $(E)$.
   (a) Montrer que l'équation n'admet qu'une solution nulle simultanément aux points 0 et $\pi$.
   (b) Déterminer les solutions de (E) bornées sur $\mathbb{R}$.
2. Répondre aux mêmes questions dans le cas où $\alpha = 0$.
3. Supposons désormais $\alpha > 0$ et posons $\alpha = \omega^2$.
   A quelle condition sur $\omega$ l'équation $(E)$ admet-elle une solution $g$ vérifiant simultanément les conditions suivantes :
   (a) $g$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
   (b) $g(0) = g(\pi) = 0$.
4. Résoudre suivant les valeurs de $\alpha$ l'équation différentielle :

$$(E') \qquad y'' + \alpha y = x^2 + 1, \quad \text{avec les conditions } y(0) = y(\pi) = 0.$$

**Exercice 4** Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $\left(1 + x^2\right) y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$.

1. Résoudre $(E)$ sur ${\mathbb{R}_+}^*$.
2. Pour tout réel $\lambda$, on définit la fonction $f_\lambda$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_\lambda(x) = \dfrac{\ln x + \lambda}{1 + x^2}$ et on note $(C_\lambda)$ sa courbe représentative dans $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
   (a) Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du plan avec $\alpha > 0$. Montrer que par $M$ passe une et une seule courbe $(C_\lambda)$.
   (b) Montrer que pour tout réel $\lambda$, la fonction $f_\lambda$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que pour tout $x > 0$, $f_\lambda'(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$.
   (d) Etudier les variations de $g_\lambda$. On montrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$ ; cette solution sera notée $m_\lambda$.
   (e) Dresser le tableau de variations de $f_\lambda$. On calculera les limites de $f_\lambda$ en 0 et $+\infty$,
   et on montrera que $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{1}{2m_\lambda^2}$.

(f) Représenter sur un même graphique les courbes $(C_{-1})$, $(C_0)$ et $(C_1)$. On donnera des valeurs approchées de $m_{-1}$ et $m_0$ à $10^{-2}$ près en précisant la méthode utilisée, ainsi que la valeur *exacte* de $m_1$.

3. Dans cette question, on cherche un équivalent de $m_\lambda$ lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$.
   (a) Montrer que pour $\lambda$ assez grand, on a : $\frac{1}{\lambda} \leqslant m_\lambda \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.
   (b) En déduire, à l'aide des questions précédentes, que $m_\lambda \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.
   *Nous verrons plus tard dans l'année que ceci est équivalent à démontrer que* $\lim_{\lambda \to +\infty} \left[ m_\lambda \times \sqrt{2\lambda} \right] = 1$.

**Exercice 5** Soit $\theta$ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 \cos^2 \theta - 2z \sin\theta \cos\theta + 1 = 0$.
   Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.
2. Résoudre l'équation différentielle (sur $\mathbb{R}$) : $(1 + \cos 2\theta) y'' - (2 \sin 2\theta) y' + 2y = 0$.
3. Déterminer les solutions éventuelles vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

**Exercice 6 Une équation de Bernoulli**
Nous nous intéressons à l'équation différentielle : $(B) \quad y' = 2y + y^2$.
Cette équation n'est pas linéaire. Néanmoins, nous allons la résoudre en nous ramenant à une équation linéaire.

1. Vérifier que l'application nulle est solution sur $\mathbb{R}$ de $(B)$.
2. Soit $y$ une solution de $(B)$. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel $y$ ne s'annule pas. Ceci justifie de poser, pour tout $t \in I$, $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.
   (a) Justifier la dérivabilité de $z$ sur $I$ et déterminer sa dérivée.
   (b) Démontrer que sur $I$, $z$ vérifie l'équation différentielle : $(F) \quad z' + 2z = -1$.
   (c) Résoudre $(F)$ et en déduire $z$ sur $I$.
   (d) En déduire $y$ sur $I$.
3. Rassembler les résultats obtenus sur les solutions de $(E)$.

**Exercice 7 Une équation de Riccati** (*utilise l'exercice 6.*)
Nous nous intéressons à l'équation $(R) \quad y' = (y - t)^2$.

1. Vérifier que $y_1 : t \mapsto (t+1)$ est une solution de $(G)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $y$ une fonction et posons $u : t \mapsto y(t) - y_1(t)$.
   Démontrer que $y$ est solution de $(R)$ si et seulement si $u$ est solution de l'équation $(B)$ de 6.
3. En utilisant l'étude des solutions de $(R)$ précédente, résoudre l'équation $(R)$.

**Exercice 8**
Résoudre $f'(x) + f(-x) = e^x$.

**Exercice 9** *(Nécessite la connaissance de la notion de limite)* Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} (f'(x) + f(x)) = 0.$$

Montrer qu'alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
*Indication : poser $g(x) = f'(x) + f(x)$, et résoudre cette équation différentielle comme si $g$ était une application quelconque. Utiliser ensuite la propriété de $g$ pour en déduire la limite de $f$ voulue.*

# 5 L'ensemble $\mathbb{N}$

**Exercice 1** Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n+1$.

**Exercice 2** Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

**Exercice 3** Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11.

**Exercice 4** Démontrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2+1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

**Exercice 5** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 676 divise $27^{n+1} - 26n - 27$ dans $\mathbb{N}$.

**Exercice 6** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $n^2$ est pair si et seulement si $n$ est pair.

**Exercice 7** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 24$, il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n = 5a + 7b$.

**Exercice 8** Considérons les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies pour tout entier naturel $n$ par $f(n) = 2n$ et $g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair .} \end{cases}$

1. Déterminer si $f$ et $g$ sont des injections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, des surjections de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
2. Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles des injections, des surjections ?

**Exercice 9** Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $\phi$ une application de $\mathbb{N}$ dans $E$.
Montrer l'équivalence entre les énoncés :

(i) $\phi$ est croissante ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \leqslant \phi(n+1)$.

**Exercice 10** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

**Exercice 11** Soient les propriétés $(n \in \mathbb{N})$ : $P_n$ : « $9 \mid 10^n - 1$ » et $Q_n$ : « $9 \mid 10^n + 1$ » .

1. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $P_m$ est vraie, alors $P_{m+1}$ est vraie et si $Q_m$ est vraie, alors $Q_{m+1}$ est vraie.
2. Pour quelles valeurs de $n$, $P_n$ et $Q_n$ sont-elles vraies ?

**Exercice 12**

1. Démontrer que pour tous $m$ et $p$ dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{m+k}{k} = \binom{m+p+1}{p}$.
   *On ne peut faire une récurrence sur deux indices simultatnément ! Commencer par se donner $m \in \mathbb{N}$ ("soit $m \in \mathbb{N}$"), puis démontrer la relation ci-dessus pour tout $p \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une récurrence sur $p$. Conclure.*
2. Démontrer que pour tous $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.
   *Cette formule sert dans de nombreux calculs.*
3. Calculer, pour tout entier naturel $n$, les sommes $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

**Exercice 13** Soient $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}(2k+1)$, $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k$ et $\tau_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}$.

1. En distinguant les cas $n$ pair et impair , déterminer $\sigma_n$.
2. Montrer que $T_n = 2\sigma_n + \tau_n$ et en déduire la valeur de $T_n$ pour tout entier naturel $n$.

**Exercice 14**

**1.** Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < n$. Montrer que : $\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}$.

**2.** Soient $p, q, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \leqslant p$ et $n \leqslant q$. Montrer que :

$$\binom{n}{p+q} = \binom{p}{0}\binom{q}{n} + \binom{p}{1}\binom{q}{n-1} + \cdots + \binom{p}{j}\binom{q}{n-j} + \cdots + \binom{p}{n}\binom{q}{0}.$$

En déduire une expression simple de : $\binom{p}{0}^2 + \binom{p}{1}^2 + \cdots + \binom{p}{p}^2$.

**Exercice 15** Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n+1-k)k$ .

**Exercice 16** Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i, j)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i, j)$ .

**Exercice 17** Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier les expressions :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k.k! \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad C_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}.$$

**Exercice 18** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

1. $f(n+m) = f(n) + f(m)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ ;
2. $f(n+m) = f(n) \times f(m)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ ;
3. $f(n) \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f$ est une permutation de $\mathbb{N}$.

**Exercice 19 (suite de Fibonacci)** Considérons la suite de Fibonacci, définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$ .
2. Démontrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{m+k} = u_{m+2n}$.

# 6 ensembles finis et dénombrement

**Exercice 1** Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit les sous-ensembles du plan $\mathbb{R}^2$ :

$$I_n = \{(i,j) \mid i,j \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}; \quad D_n = \{(i,i) \mid i \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n\};$$
$$J_n = \{(i,j) \mid i,j \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant i < j \leqslant n\}; \quad K_n = \{(i,j) \mid i,j \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant j < i \leqslant n\}.$$

1. Représenter ces ensembles pour $n = 4$ et justifier qu'ils sont finis (dans le cas $n$ quelconque).
2. Calculer $\mathrm{Card}(D_n)$.
3. Démontrer que les ensembles $J_n$, $D_n$ et $K_n$ forment une partition de $[\![1,n]\!]^2$ et que $\mathrm{Card}(J_n) = \mathrm{Card}(K_n)$.
4. En déduire $\mathrm{Card}(I_n)$, $\mathrm{Card}(J_n)$ et $\mathrm{Card}(K_n)$.

**Exercice 2** Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $\Delta_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = n\}$. Démontrer que $\Delta_n$ est fini et calculer son cardinal. Mêmes questions pour $T_n = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \mid x+y+z = n\,\}$

**Exercice 3** Soient $E$ un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Démontrer que :
$\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C)$.

**Exercice 4** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ ?

**Exercice 5** Au Loto, une grille simple est un choix de 6 numéros parmi $[\![1,49]\!]$.

1. Calculer le nombre total de grilles que l'on peut jouer.
2. Pour une grille gagnante donnée, calculer le nombre de grilles à $n$ bons numéro, pour $n = 5$, $n = 4$ et $n = 3$.

**Exercice 6 (Le « paradoxe » des anniversaires.)**

1. Quelle est la probabilité qu'une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ soit injective ?
2. Quelle est la probabilité que dans la classe de MPSI1, que deux élèves soient nés le même jour de l'année ?

**Exercice 7** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Calculer $K(E) = \displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X)$.

*On remarquera que le calcul demandé a été effectué la feuille n°5.*

**Exercice 8** On considére un lot de 20 pièces fabriquées : 4 d'entre elles sont mauvaises, les 16 autres sont bonnes. On prélève 4 pièces parmi les 20.

1. Calculer le nombre $x$ de façons de faire ce prélèvement.
2. Calculer le nombre $y$ de façons de faire ce prélèvement de telle manière que les 4 pièces prélevées soient bonnes.
3. Calculer le nombre $z$ de façons de faire ce prélèvement de telle manière que l'une au moins des 4 pièces prélevées soit mauvaise.
4. On désigne par $t_i$ le nombre de façons de faire le prélèvement de telle manière que sur les 4 pièces prélevées $i$ pièces et $i$ seulement d'entre elles soient mauvaises. Calculer $t_1$, $t_2$, $t_3$ et $t_4$ puis comparer $z$ et $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$.

**Exercice 9** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que l'application $\mathrm{Card} : \mathcal{P}([\![1;n]\!]) \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et non injective.

**Exercice 10** Soient $p, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant n$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.

**Exercice 11** Soient $n, p, k \in \mathbb{N}$, E un ensemble fini tel que $\mathrm{Card}(E) = n$ et $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $\mathrm{Card}(A) = p$.
Déterminer le nombre de parties $X \in \mathcal{P}_k(E)$ telles que $X \cap A = X$ puis telles que $X \cap A = \emptyset$.

**Exercice 12** Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{N}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i = n$.
Calculer le cardinal de $E = \{\, f : [\![1,n]\!] \to [\![1,p]\!] \mid \forall i \in [\![1;p]\!], \mathrm{Card}(f^{-1}(\{i\})) = a_i$.

# 7 géométrie analytique

## 7.1 Le plan

**Exercice 1** Soient $A(-1;1)$, $B(-2,2)$ et $C(0,6)$ des points du plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$. Déterminer :

1. des équations (cartésiennes et paramétriques) :
   – de la droite $(AB)$ ;
   – de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $C$ et parallèle à $(AB)$ ;
   – de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par $A$ et orthogonale à $(AB)$ ;
2. l'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ;
3. la distance de $C$ à $\mathcal{D}_2$ ;
4. le projeté orthogonal $H$ de $C$ sur $\mathcal{D}_2$. Vérifier que $\|\overrightarrow{CH}\| = d(C, \mathcal{D}_2)$.

**Exercice 2** Dans dans le plan affine euclidien, soit $ABC$ un triangle. On pose $a = \| \overrightarrow{BC} \|$, $b = \| \overrightarrow{AC} \|$ et $c = \| \overrightarrow{AB} \|$ et on note $A'$ le milieu du segment $[BC]$, $B'$ celui de $[AC]$ et $C'$ celui de $[AB]$. Soit $G$ l'isobarycentre du triangle $(A, B, C)$.

1. Montrer que pour tout point $M$ du plan :
   $\| \overrightarrow{MA} \|^2 + \| \overrightarrow{MB} \|^2 + \| \overrightarrow{MC} \|^2 = 3\| \overrightarrow{MG} \|^2 + \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$.
2. En calculant de deux façons différentes $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \mid \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$, établir que :
   $2\left(\overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MA'}\right) + \left(\overrightarrow{MB} \mid \overrightarrow{MC}\right) = 3\| \overrightarrow{MG} \|^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{6}$.
3. Considérons les points communs aux cercles de diamètres $[AA']$ et $[BC]$. Montrer que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre $G$ dont on donnera le rayon en fonction de $a$, $b$ et $c$.

**Exercice 3** Etant donnés 3 points $A$, $B$ et $C$ du plan $\mathcal{E}_2$, montrer que pour tout point $M$ du plan, on a la relation : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
Retrouver, à l'aide de cette relation, le fait que les trois hauteurs d'un triangle sont concourrantes.

**Exercice 4** Soit $M$ le point d'abscisse $\alpha$ de la droite $(D)$ d'équation $y = x$. Soient $A$ le point d'affixe $i$ et $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe $1 + 2i$.

Etudier suivant les valeurs de $\alpha$ la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$.

**Exercice 5** $D_1$ et $D_2$ sont deux droites distinctes parallèles ; $A$ est un point du plan. On cherche les points $M_1$ de $D_1$ et $M_2$ de $D_2$ tels que $AM_1M_2$ soit rectangle en $A$ et isocèle. Choisir un repère, noter $a$, $m_1$ et $m_2$ les affixes de $A$, $M_1$ et $M_2$. En étudiant le quotient $\dfrac{m_2 - a}{m_1 - a}$ et résoudre le problème.

**Exercice 6** $ABC$ est un triangle rectangle isocèle de sommet $A$ et $H$ le milieu de $[BC]$. $\mathcal{D}$ est une droite passant par $A$ et ne coupant pas le segment $[BC]$. Notons $B'$ et $C'$ les projetés orthogonaux de $B$ et $C$ sur $\mathcal{D}$.

1. Montrer que le triangle $B'HC'$ est rectangle isocèle.
2. Montrer que $B'C' = BB' + CC'$.
3. Reprendre les questions précédentes dans le cas où $\mathcal{D}$ coupe le segment $[BC]$.

## 7.2 L'espace

**Exercice 7** Soient $A(-1;1;1)$, $B(-1;-1;0)$, $C(-2;3;1)$ et $D(1;2;1)$ des points de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_3$. Déterminer :

1. une équation de la droite $(AB)$ ;
2. une équation du plan $(ABC)$ (penser à vérifier que les points ne sont pas alignés) ;
3. une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $D$ et normal à $\overrightarrow{AB}$ ;
4. une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap (ABC)$ ( vérifier que les plans ne sont pas parallèles) ;
5. la distance de $A$ au plan $\mathcal{P}$ ;
6. le projeté orthogonal $H$ de $A$ sur $\mathcal{P}$.
   Vérifier que $\|\overrightarrow{AH}\| = d(A, \mathcal{P})$ ;
7. la distance de $C$ à $\mathcal{D}$ ;
8. le projeté orthogonal $K$ de $C$ sur $\mathcal{D}$.
   Vérifier que $\|\overrightarrow{CK}\| = d(C, \mathcal{D}_2)$.

**Exercice 8** Dans l'espace $\mathcal{E}_3$ muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(6,-6,6)$ $B(-6,0,6)$ et $C(-2,-2,11)$.

1. (a) Déterminer une équation de la sphère $S$ de centre $B$ et passant par $A$.
   (b) Déterminer une équation du plan $\Pi$ tangent à $S$ en $A$.
2. (a) Déterminer les coordonnées du pied $D$ de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\Pi$ passant par $C$ : $\{D\} = \mathcal{D} \cap \Pi$.
   (b) Etudier l'intersection des droites $(AD)$ et $(BC)$ et déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection.

**Exercice 9** L'espace $\mathcal{E}_3$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $A(6,0,0)$ et $B(0,6,0)$.

1. Déterminer le barycentre $G$ du système $\{(O,1),(A,2),(B,3)\}$.
2. Soit $C(0,0,6)$. Déterminer l'ensemble $S$ des points $M$ de l'espace définis par $\left(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{MC} = 0$. Donner une équation cartésienne de $S$.
3. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 4y + \frac{17}{2} = 0$.
   Déterminer la distance du centre $\Omega$ de $S$ à $\mathcal{P}$. Que peut-on en déduire pour $S$ et $\mathcal{P}$ ?
4. Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$. Montrer que $G$ appartient à $\mathcal{Q}$ et déterminer $\mathcal{Q}$.

**Exercice 10** On désigne par $E$ l'ensemble des tripets $(x,y,z)$ de réels non nuls vérifiant $x+y+z=0$. Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$, soient $A$, $B$ et $C$ des points non alignées, et notons $O$ le centre du cercle circonscrit au triangle $(ABC)$ (*Rappelons que c'est le cercle passant par $A$, $B$ et $C$*). Soit $(x,y,z) \in E$.

1. Montrer que chacun des ensembles de points pondérés $\{(B,y),(C,z)\}$, $\{(A,x),(C,z)\}$ et $\{(A,x),(B,y)\}$ possède un barycentre.
   Dans la suite, ces trois seront notés respectivement $I$, $J$ et $K$.
2. (a) Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul, tel que , pour tout point $M$ du plan $\mathcal{P}$, on a : $x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{v}$.
   *(Exprimer $\overrightarrow{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.)*
   (b) Montrer que $\overrightarrow{v}$ n'est colinéaire à aucun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   (c) Montrer que chacun des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ est non nul et colinéaire à $\overrightarrow{v}$.
3. (a) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{P}$, on a : $xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{v}$.
   (b) En déduire que le lieu géométriques des points $M$ de $\mathcal{P}$ vérifiant la relation $xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = 0$ est la droite $\mathcal{D}$ passant par $O$ et orthogonale à chacune des droites $(AI)$, $(BJ)$ et $(CK)$.
   On dit que $\mathcal{D}$ est la droite associée à $\{(A,x),(B,y),(C,z)\}$.
   (c) *Application :* Construire la droite $\mathcal{D}$ associée à $\{(A,-3),(B,1),(C,2)\}$.
4. Soit $\Delta$ une droite passant par $O$, distincte de chacune des médiatrices du triangle $ABC$. Montrer que l'on peut trouver un triplet $(x_0,y_0,z_0)$ de $E$ tel que $\Delta$ soit la droite associée à $\{(A,x_0),(B,y_0),(C,z_0)\}$.

**Exercice 11** Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

**1.** Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, tel que $\| \overrightarrow{x} \| = 1$.

**a.** Montrer que $\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x} | \overrightarrow{i}) \overrightarrow{i} + (\overrightarrow{x} | \overrightarrow{j}) \overrightarrow{j} + (\overrightarrow{x} | \overrightarrow{k}) \overrightarrow{k}$.

**b.** Calculer $\| \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{i} \|^2 + \| \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{j} \|^2 + \| \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{k} \|^2$.

**c.** en déduire que l'un au moins des trois réels $\| \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{i} \|$, $\| \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{j} \|$, $\| \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{k} \|$ est supérieur ou égal à $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

**2.** Établir, pour tous $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d} \in \mathbb{R}^3$ les formules suivantes :

**a.** $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) = \left(\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)\right)^2$

**b.** $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}$ ;

**c.** $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right) = (\overrightarrow{a} | \overrightarrow{d}) \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ ;

**d.** $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b} \wedge (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c} \wedge (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0}$

**3.** Soient $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\| \overrightarrow{b} \| = \| \overrightarrow{c} \|$. Démontrer que :

$$\left( ((\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \wedge (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})) \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) \middle| (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \right) = 0.$$

**4.** Résoudre l' équation suivante (d'inconnue $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$) : $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, $\quad (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$.

**Exercice 12** Soit $\mathcal{E}_3$ l'espace affine muni de sa structure canonique. Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points non coplanaires tels que $\left(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{AD}\right) = 0$.

1. Justifier le fait que $\mathcal{R} = \left(A, \dfrac{1}{\| \overrightarrow{AB} \|}.\overrightarrow{AB}, \dfrac{1}{\| \overrightarrow{AC} \|}.\overrightarrow{AC}, \dfrac{1}{\| \overrightarrow{AD} \|}.\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}_3$. Est-il direct ?
   Donner les coordonnées de $A$, $B$, $C$ et $D$ dans ce repère en fonction des trois réels $b = \| \overrightarrow{AB} \|$, $c = \| \overrightarrow{AC} \|$ et $d = \| \overrightarrow{AD} \|$.
2. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} - \{-1\}$ et $E$, $F$, $G$ et $H$ les barycentres respectifs de $[(A, 1); (B, \alpha)]$, $[(B, 1); (C, \beta)]$, $[(C, 1); (D, \gamma)]$ et
   Donner les coordonnées des points $E$, $F$, $G$ et $H$ dans $\mathcal{R}$.
3. (a) Supposons que $E$, $F$, $G$ et $H$ sont coplanaires. En déduire que $\alpha\beta\gamma\delta = 1$.
   (b) Réciproquement, supposons que $\alpha\beta\gamma\delta = 1$. Montrer que $E$, $F$, $G$ et $H$ sont alors coplanaires.
   (c) Nous avons obtenu une Condition Nécessaire et Suffisante (C.N.S.) sur $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ ( $\alpha\beta\gamma\delta = 1$) pour que $E$, $F$, $G$ et $H$ soient coplanaires.
   Indiquer entre 3a et 3b quelle est la preuve que cette condition est nécessaire et quelle est celle que cette condition est suffisante.
4. (a) Déterminer les équations des plans $(ECD)$, $(FDA)$, $(GAB)$ et $(HBC)$.
   (b) Déterminer une C.N.S. sur $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ pour que les quatres plans ci-dessus aient au moins un point commun.

# 8 groupes

**Exercice 1** Soient $H_1$ et $H_2$ deux sous-groupes d'un groupe $(G, \star)$. Montrer l'équivalence entre les assertions :

(i) $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de $(G, \star)$ ;

(ii) $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

**Exercice 2** Soient $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$.
Montrer que $C_a = \{ x \in G / x \star a = a \star x \}$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

**Exercice 3** Soit $(G, *)$ un groupe, $e$ son élément neutre.
Si $z \in G$, son inverse est noté $z^{-1}$. Pour tout $a \in G$, définissons l'application :

$$f_a \ : \ \begin{array}{rcl} G & \to & G \\ x & \mapsto & f_a(x) = a * x * a^{-1}. \end{array}$$

Posons $F = \{f_a \mid a \in G\}$.

1. Soit $a \in G$. Démontrer que $f_a$ est un automorphisme de $(G, *)$ *(i.e un isomorphismes de groupes de $(G, *)$ sur $(G, *)$).*
   Cet automorphisme $f_a$ est appelé *l'automorphisme intérieur de $(G, *)$ associé à $a$.*
2. Soit $a, b, x \in G$. Démontrer que $f_a(x) = f_b(x)$ si et seulement si $x$ et $a^{-1} * b$ commutent.
3. Démontrer que $(F, \circ)$ est un groupe.
4. Démontrer que l'application
   $$\varphi \ : \ \begin{array}{rcl} G & \to & F \\ a & \mapsto & \varphi(a) = f_a. \end{array}$$
   est un morphisme de groupes de $(G, *)$ dans $(F, \circ)$.

**Exercice 4** Soit $(G, \times)$ un groupe d'élément neutre $e$ tel que pour tout $x \in G$, $x^3 = e$. Montrer que pour tout couple $(x, y)$ de $G^2$,

$$(xy)^2 = y^2x^2; xy^2x = yx^2y \text{ et } x^2yx^2 = y^2xy^2.$$

**Exercice 5** Soit $c > 0$ un réel, $I = ]-c; c[$.
Pour tout couple $(x, y) \in I^2$, on définit $x \star y = \dfrac{x+y}{1 + xy/c^2}$.
Démontrer que $(I, \star)$ est un groupe abélien.

**Exercice 6 (neutralisateur et centralisateur d'un groupe)**
Soit $(G, *)$ un groupe de neutre $e_G$ et $A \in \mathcal{P}(G)$.
Pour $x \in G$, on note $x^{-1}$ l'inverse de $x$ pour $*$. et les ensembles $A.x = \{a * x \mid a \in A\}$ et $x.A = \{x * a \mid a \in A\}$.
Enfin, notons $C(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A, a * x = x * a\}$ le *centralisateur* de $A$ et $N(A) = \{x \in G \mid x.A = A.x\}$ le *neutralisateur* de $A$ .

1. Démontrer que $N(A)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
   *Faire bien attention à la définition de $N(A)$ : l'égalité "$x.A = A.x$" est une égalité d'ensembles ! Il convient d'être vigilant et rigoureux.*
2. (a) Démontrer que $C(A)$ est un sous-groupe de $(N(A), *)$.
   (b) Démontrer que $\forall x \in C(A)$, $\forall z \in N(A)$, $z * x * z^{-1} \in C(A)$. On dit alors que $C(A)$ est un *sous-groupe distingué* de $(N(A), *)$.

**Exercice 7** Soit $(G,*)$ un groupe. Notons $S(G)$ l'ensemble des bijections de $G$ sur $G$ et $\circ$ la loi de composition des fonctions. Rappelons que $(S(G),\circ)$ est un groupe.

1. Soit $a \in G$. Définissons l'application $f_a : \begin{cases} G & \to G \\ x & \mapsto f_a(x) = a * x \end{cases}$

   Démontrer que $f_a \in S(G)$.

2. Le résultat de la question précédente justifie la définition de l'application suivante : $\Phi : \begin{cases} G & \to S(G) \\ a & \mapsto \Phi(a) = f_a \end{cases}$

   (a) Démontrer que $\Phi$ est un morphisme de groupe de $(G,*)$ dans $(S(G),\circ)$.

   (b) Démontrer que $\Phi$ définit un isomorphisme de groupes de $(G,*)$ sur un sous-groupe de $(S(G),\circ)$.

**Exercice 8** Soit $E$ muni d'une loi de composition interne $\star$ et d'une relation d'ordre $\leqslant$ vérifiant :

(L.1) $\forall (a,b) \in E^2$, $a \star b \leqslant a$ ;

(L.2) $\forall (a,b) \in E^2$, $a \star b \leqslant b$ ;

(L.3) $\forall (a,b,x) \in E^3$, $(x \leqslant a \text{ et } x \leqslant b) \Rightarrow (x \leqslant a \star b)$ .

1. Rappeler les axiomes d'une relation d'ordre.
2. Montrer que pour tout $(a,b) \in E^2$, $a \star b \leqslant b \star a$. En déduire que $\star$ est commutative.
3. Montrer que pour tout $a \in E$, $a \star a \leqslant a$. En déduire que pour tout $a \in E$, $a \star a = a$.
4. Montrer que pour tout $(a,b,c,d) \in E^4$, $\left\{ \begin{array}{l} a \leqslant b \Rightarrow a \star c \leqslant b \star c; \\ (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) \Rightarrow a \star c \leqslant b \star d. \end{array} \right.$
5. Démontrer que $\star$ est associative.
6. Soit $e \in E$. Démontrer l'équivalence entre les énoncés :

   (i) $e$ est élément neutre pour $\star$ ;

   (ii) $e = \max(E)$.
7. Donner un exemple de tel ensemble $E$, muni de $\star$ et de $\leqslant$ dans lequel il existe un élément neutre

**Exercice 9** Soit $H$ un sous-groupe d'un groupe fini $(G,\star)$ . On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur G par :

$$x\mathcal{R}y \iff x \star y^{-1} \in H\ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $G$ .
2. Si $x \in G$, on définit $C_x = \{y \in G \mid x\mathcal{R}y\}$ la *classe d'équivalence de $x$ modulo $\mathcal{R}$*. On note $G/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.
   Montrer que les classes d'équivalence, modulo $\mathcal{R}$ ont toutes le même cardinal et déterminer ce cardinal.
3. En déduire que $Card(G) = Card(H) \times Card(G/\mathcal{R})$.
   *( C'est le **théorème de Lagrange** : Dans un groupe fini, l'ordre de tout sous-groupe divise l'ordre du groupe.)*
4. Cas où $(G,\star)$ est de cardinal impair :
   montrer que l'application $x \longmapsto x^2$ est une permutations de $G$.

**Exercice 10**

1. Soient $G$ et $G'$ deux groupes finis et soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Prouver que $\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(\ker(f)).\mathrm{Card}(\ \mathrm{Im}(f)$
2. Combien y a-t-il de morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z},+)$ ?

# 9 arcs paramétrés

**Exercice 1** Tracer la courbe d'équation paramétrique : $M(t)\left\{\begin{array}{l} x(t)=\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ \\ y(t)=\tan(t). \end{array}\right.$

**Exercice 2** Tracer la courbe d'équation paramétrique : $M(t)\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos(t) \\ y(t)=\sin(t)(1+\cos(t)). \end{array}\right.$

**Exercice 3** Tracer la courbe d'équation paramétrique : $M(t)\left\{\begin{array}{l} x(t)=2t^2-2t+\dfrac{1}{t^2} \\ \\ y(t)=2t+\dfrac{1}{t^2}. \end{array}\right.$

*On prendra en particulier soin de l'étude des asymptotes éventuelles, et l'on déterminera le point double (on pourra pour cela utiliser $x-y$ et $x+y$).*

**Exercice 4** Tracer la courbe d'équation polaire : $\rho(\theta)=4\cos(\theta)\cos(2\theta)$.

**Exercice 5** Tracer la courbe d'équation polaire : $\rho(\theta)=\sin\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$.

**Exercice 6** Tracer la courbe d'équation polaire : $\rho(\theta)=\dfrac{\tan(\theta)}{1+\sin(\theta)}$.

**Exercice 7** Soit $\rho$ la fonction de la variable réelle définie par $\rho(\theta)=\arctan\left(\sin(\theta)+\cos(\theta)\right)$.
Nous nous intéressons à la courbe $(\Gamma)$ définie par l'équation polaire : $\overrightarrow{OM(\theta)}=\rho(\theta)\cdot\overrightarrow{u_\theta}$, où $O$ est l'origine et $(\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{v_\theta})$ est le repère tournant orthonormé direct associé à l'angle $\theta$.

1. Calculer $\rho(\theta+\pi)$. En déduire que $M(\theta)=M(\theta+\pi)$. Que peut-on en déduire pour le tracé du support de $(\Gamma)$ ?
2. Tracer le support de $(\Gamma)$. Détailler la démarche et les valeurs/vecteurs permettant ce tracé.

Données : $\frac{\pi}{4}\simeq 0,78$ et $\arctan(\sqrt{2})\simeq 0,96$.

**Exercice 8** A tout réel $t$ on associe le point $M(t)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées :

$$x(t)=\cos t+\sqrt{3}\sin t+1,\ y(t)=\cos t-\sqrt{3}\sin t+1 \text{ et } z(t)=-2\cos t+1.$$

1. Montrer qu'il existe un plan $P$ tel que $M(t)\in P$ pour tout $t$.
2. Montrer qu'il existe une sphère $S$ telle que $M(t)\in S$ pour tout $t$.
3. Montrer que lorsque $t$ décrit $]-\pi;\pi]$, $M(t)$ appartient à un cercle de $P$ dont on déterminera le centre et le rayon.

**Exercice 9** On considère la courbe définie paramétriquement par $M(t)\left\{\begin{array}{l} x(t)=3t^2 \\ \\ y(t)=2t^3. \end{array}\right.$

1. Tracer la courbe.
2. Donner un équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}_t$ au temps $t$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
3. Montrer que par un point $M=(x,y)$ non situé sur l'axe des abscisses il passe au plus trois tangentes à la courbe.
4. On cherche l'ensemble $E$ des points $M=(x,y)$ non situés sur l'axe des abscisses tels qu'il y passe deux tangentes $\mathcal{T}_{t_1}$ et $\mathcal{T}_{t_2}$ à la courbe, orthogonales entre elles. On procède par analyse / synthèse : soit $(x,y)$ un couple convenable.
   (a) Montrer que $t_1t_2=-1$.
   (b) Montrer que $x=t_1^2+t_2^2-1$, $y=-(t_1+t_2)$.
   (c) Montrer finalement que $M$ est sur l'ensemble $P$ d'équation cartésienne $X=Y^2+1$, que l'on tracera.
   (d) Faire la synthèse : résoudre le problème.

**Exercice 10** Commencer par retracer *(fait en cours)* la cardioïde d'équation polaire $\rho(\theta) = (1+\cos(\theta))$.

1. *Préliminaires :* montrer que pour tout réel $\alpha$, $\cos(\alpha) + \cos\left(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$.
   *Cette formule peut être obtenue en utilisant des formules trigonométriques. Démontrez-là également sans utiliser ces formules.*
2. Soient $P$ et $Q$ deux points de la courbe alignés et non confondus avec l'origine $O$. Montrer que les tangentes en $P$ et $Q$ sont orthogonales.
3. Montrer qu'en tout point $M(\theta)$ de la courbe, la tangente est dirigée par $\overrightarrow{u}\left(\dfrac{3\theta+\pi}{2}\right)$.
4. En déduire que pour toute droite $D$ du plan de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha)$ il existe trois points $\overrightarrow{M}(\theta_i)$ de la cardioide tels que la tangente est parallèle à $D$.
   *Remarque : on trouve* $\theta_1 = \dfrac{2\alpha - \pi}{3}$, $\theta_2 = \theta_1 + \dfrac{2\pi}{3}$ *et* $\theta_3 = \theta_1 - \dfrac{2\pi}{3}$.
5. En justifiant que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{OM(\theta)} = \left(\cos\theta + \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\overrightarrow{u} + \left(\sin\theta + \dfrac{\sin(2\theta)}{2}\right)\overrightarrow{v}$, montrer que le centre de gravité du triangle $(M(\theta_1), M(\theta_2), M(\theta_3))$ ne dépend pas de $\alpha$.

**Exercice 11** Le plan affine euclidien est assimilé à $E = \mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $\|\cdot\|$. La base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est alors une base orthonormale directe de $E$.

Pour tout réel $\theta$, on note : $\begin{cases} \overrightarrow{u_\theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos(\theta).\overrightarrow{e_1} + \sin(\theta).\overrightarrow{e_2}; \\ \rho(\theta) = 1 + 2\cos(3\theta); \\ \overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta).\overrightarrow{u_\theta}. \end{cases}$

Soit enfin $\Gamma = \{M(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

1. On se propose de représenter la courbe $\Gamma'$ d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(3\theta)$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$.
   (a) Déterminer les valeurs de $\theta$ dans $[0, \frac{\pi}{3}]$ pour lesquelles $\rho(\theta) = 0$.
   (b) Calculer la dérivée de $\rho$ et déterminer les valeurs de $\theta$ dans $[0, \frac{\pi}{3}]$ pour lesquelles $\rho'(\theta) = 0$.
   (c) Expliciter les tangentes à $\Gamma'$ aux points $M(0)$, $M(\frac{2\pi}{9})$ et $M(\frac{\pi}{3})$.
   (d) Représenter $\Gamma'$. On fera apparaître sur le dessin les tangentes aux points $M(0)$, $M(\frac{2\pi}{9})$ et $M(\frac{\pi}{3})$.
2. On se propose dans cette question de déduire la représentation de la courbe $\Gamma$ de celle de la courbe $\Gamma'$. On note $\sigma$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation (polaire) $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\tau$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
      i. Donner une équation cartésienne de la droite $\theta = \frac{\pi}{3}$.
      ii. Exprimer l'image par $\sigma$ du point $M(\theta)$.
      iii. En déduire l'équivalence entre les énoncés :
         (i) $M(\theta) \in \Gamma$ ;
         (ii) $\sigma(M(\theta)) \in \Gamma$.
   (b) i. Exprimer l'image par $\tau$ du point $M(\theta)$.
      ii. En déduire l'équivalence entre les énoncés :
         (i) $M(\theta) \in \Gamma$ ;
         (ii) $\tau(M(\theta)) \in \Gamma$.
      iii. Représenter $\Gamma$. On utilisera (en le justifiant) $\sigma$ pour représenter $\{M(\theta) \mid \theta \in [0, \frac{2\pi}{3}]\}$ et $\tau$ et $\tau^{-1}$ pour conclure.

# 10 coniques

**Exercice 1** Deux paraboles distinctes de même axe et de même foyer $F$ ont un point commun $M$.

1. Montrer que $F$ se situe nécessairement entre les deux sommets des paraboles.
2. Calculer une mesure de l'angle des deux tangentes en un point de contact.

**Exercice 2** Soient $(E)$ une ellipse, $[AA']$ son grand axe, $M \in (E) - \{A, A'\}$.
La tangente en $M$ coupe les tangentes en $A$ et $A'$ à $(E)$ en $P$ et $P'$ respectivement.
Montrer que la grandeur $\overline{AP}.\overline{A'P'}$ est constante (mesures algébriques).

**Exercice 3** Dans le plan de repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2p}$, avec $p \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $A$ le point de $\mathcal{P}$ ayant pour abscisse $a$. Donner les coordonnés des points $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ définis comme suit :
   – $A_1$ est le projeté orthogonal de $A$ sur la directrice $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ ;
   – $A_2$ est l'intersection de la tangente $d_A$ à $\mathcal{P}$ en $A$ et de l'axe des abscisses $(Ox)$ ;
   – $A_3$ est l'intersection de la tangente à $\mathcal{P}$ en $A$ et de l'axe des ordonnées $(Oy)$ ;
   – $A_4$ est le projeté orthogonal de $A$ sur l'axe des ordonnées $(Oy)$.
   Vérifier que $O$ est le milieu de $[A_3A_4]$.
2. Montrer que :
   (a) le foyer $F$ de $\mathcal{P}$ se projette orthogonalement en $A_2$ sur la tangente $d_a$ en $A$ à $\mathcal{P}$ ;
   (b) le symétrique de $F$ par rapport à $d_a$ est le point $A_1$.
3. Soit $B$ le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse $b$ et $d_b$ la tangente à $\mathcal{P}$ en $B$. $d_a$ et $d_b$ se coupent en $I$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point $I$.
   (b) Déterminer celles du milieu $J$ de $[AB]$.
   (c) Vérifier que la droite $(IJ)$ est parallèle à l'axe des ordonnées $(Oy)$.
4. Soit $L$ le milieu de $[IJ]$.
   (a) Déterminer les coordonnées de $L$.
   (b) Vérifier que $L$ est sur la parabole $\mathcal{P}$.
   (c) Montrer que la tangente en $L$ à $\mathcal{P}$ est parallèle à $(AB)$.
5. Déterminer une relation entre $a$ et $b$ pour que $d_a$ et $d_b$ soient perpendiculaires.
   Montrer qu'alors $I$ est sur la directrice $\mathcal{D}$, que $(AB)$ contient $F$ et que $\overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

**Exercice 4** Étudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $16x|x| + 36y|y| = 16^2 \times 36^2$.

**Exercice 5** Déterminer en fonction de $a \in \mathbb{R}$, la nature de la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$x^2 + 2axy + y^2 + 4x - a^2 = 0.$$

De plus :

1. dans le cas d'une parabole, en donner les éléments caractéristiques ainsi qu'un paramétrage ;
2. pour quelles valeurs de $a$ a-t-on un cercle ? En donner un paramétrage ;
3. pour quelles valeurs de $a$ a-t-on la réunion de deux droites ?

**Exercice 6** Un point $M$ d'une hyperbole $\mathcal{H}$ est projeté orthogonalement en $H$ et $H'$ sur les asymptotes.
Montrer que la grandeur $MH \cdot MH'$ est constante.

**Exercice 7** Soit $(E)$ une ellipse, $O$ son centre et $M \in \mathcal{E}$. On note $P$ l'un des points de $\mathcal{E}$ en lesquels la tangente à l'ellipse est parallèle à $(OM)$.
Montrer que l'aire du triangle $MOP$ est constante quand $M$ décrit $\mathcal{E}$, ainsi que la grandeur $OM^2 + OP^2$.

**Exercice 8** Démontrer que le projeté orthogonal $A$ du foyer $F$ d'une parabole $\Gamma$ sur une tangente en un point $M$ de $\Gamma$ appartient à la tangente au sommet de $\Gamma$.

**Exercice 9** Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$.

1. (a) Préciser le foyer $F$ et la directrice $D$ de $\mathcal{P}$.
   (b) Soit $A$ le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse $-4$ et $B$ celui d'abscisse 2. Déterminer les équations des tangentes en $A$ et $B$ à $\mathcal{P}$, puis les coordonnées du point $I$ d'intersection de ces tangentes notées respectivement $T_A$ et $T_B$.
   (c) On désigne par $s$ la similitude directe de centre $F$ transformant $A$ en $I$. Déterminer $s$ (on déterminera son centre, son rapport et son expression complexe).
   (d) Soit $M$ le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse $t$. La tangente $T_M$ à $\mathcal{P}$ en $M$ coupe $T_A$ en $S$ et $T_B$ en $T$.
      i. Calculer les coordonnées de $S$ et $T$.
      ii. Déterminer $s(S)$.
2. Une droite $\Delta$ de coefficient directeur $m$ et passant par $F$ coupe $\mathcal{P}$ en $M'$ et $M''$.
   (a) Déterminer en fonction de $m$ les coordonnées du milieu $J$ de $[M'M'']$ et celles de $K$ intersection des tangentes $T_{M'}$ et $T_{M''}$ à $\mathcal{P}$ en respectivement $M'$ et $M''$.
   (b) Vérifier que $T_{M'}$ et $T_{M''}$ sont orthogonales ainsi que les droites $(FK)$ et $\Delta$.
   Montrer que le milieu $L$ de $[JK]$ est sur $\mathcal{P}$.

**Exercice 10 (Sections planes d'un cône de révolution)** Un cône de révolution est défini par son sommet $S$, son axe de révolution $D$ et une mesure $\alpha \in ]0, \dfrac{\pi}{2}[$ de l'angle que fait une génératrice avec l'axe.

1. Déterminer l'équation cartésienne du cône.
2. Justifier que pour étudier le cas général de l'intersection d'un cône et d'un plan, on peut se ramener au cas du plan $z = 0$.
3. Étudier la nature d'une section plane d'un cône.

**Exercice 11 (Projection orthogonale d'un cercle sur un plan)** Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni d'un repère orthonormé on considère l'ensemble des points $C$ vérifiant les équations : $C \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \dfrac{8}{3} \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

1. Quelle est la nature de $C$ ?
2. Donner l'expression en coordonnées de la projection orthogonale $p$ sur le plan $z = 0$.
3. En déduire une équation du projeté orthogonal $p(C)$ de $C$ sur le plan $z = 0$ (on donnera une relation entre $x$ et $y$ vérifiée par tout point de $C$).
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $p(C)$.

**Exercice 12 (Lieu de points du plan tels que $MF + MF'$ est constant)** On travaille dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé.
Soit $F$ et $F'$ les deux points du plan de coordonnées respectives $(\sqrt{5}, 0)$ et $(-\sqrt{5}, 0)$. On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$MF + MF' = 6.$$

1. Quelle est la nature de $\mathcal{C}$ ? Précisez ses éléments caractéristiques.
2. Donner une équation cartésienne <u>simple</u> de $\mathcal{C}$.
3. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{C}$ et tracer cet ensemble.
4. Tracer le support de la courbe paramétrée d'équation :

$$M(t) \quad \begin{cases} x(t) = 3\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \\ y(t) = 2\,\dfrac{2t}{1+t^2}. \end{cases}$$

5. Commentaire ? Démontrer ce commentaire !

# 11 structure d'anneau, arithmétique dans $\mathbb{Z}$

**Exercice 1** Soient $A$ un anneau commutatif et $f : A \to \mathbb{R}_+$ une application telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in A, & f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\,; \\ \forall (x,y) \in A^2, & f(xy) = f(x)f(y)\,; \\ \forall (x,y) \in A^2, & f(x+y) \leqslant \operatorname{Max}(f(x), f(y)). \end{cases}$$

On pose $F = \{x \in A \mid f(x) \leqslant 1\}$ et $U = \{x \in A \mid f(x) < 1\}$.

1. Démontrer que $F$ est un anneau.
2. (a) Démontrer que $(U, +)$ est un groupe.
   (b) Démontrer $U \subset F$ et que pour tout élément $x$ dans $U$, et tout élément $a$ de $F$, $xa \in U$.
   *Cette dernière propriété se note $UF \subset U$ et ces deux propriétés font de $U$ un idéal à droite de $F$*
   (c) La propriété précédente est-elle encore vraie à gauche *( i.e. $FU \subset U$ )* ? Pour $A$ à la place de $F$ ?

**Exercice 2** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{Z}$ (ou de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{C}$,...).

1. Démontrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} {b_j}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$.
2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} {b_j}^2\right)$

**Exercice 3 (Un anneau de matrices : $M_2(\mathbb{R})$)**
Une matrice carrée réelle de taille $(2,2)$ est un tableau $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a$, $b$ , $c$ et $d$ sont des nombres réels. L'ensemble des matrices carrées $(2,2)$ sera noté $M_2(\mathbb{R})$. On munit cet ensemble de deux lois de composition internes :

– une addition en posant :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

– une multiplication en posant :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

1. Vérifier (rapidement) que $(M_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe abélien dont on précisera le neutre, appelé *zéro de $M_2(\mathbb{R})$*.
2. Vérifier (rapidement) que $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ est un monoïde unitaire dont on précisera le neutre, appelé *unité de $M_2(\mathbb{R})$*.
3. Vérifier que l'addition est distributive par rapport à la multiplication *(i.e. pour toutes $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, $(A+B) \times C = A \times C + B \times C$ et $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$)*.
4. Montrer, à l'aide d'un exemple, que la multiplication n'est pas commutative *(i.e. il existe $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $A \times B \neq B \times A$)*. Dans ce cas, vérifier que l'identité remarquable $(A+B)^2 = A^2 + 2A \times B + B^2$ n'est pas vraie.
5. Trouver deux matrices $A$ et $B$ non nulles telles $A \times B = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

**Exercice 4** Soit $A \subset \mathbb{Z}$ , $A \neq \emptyset$. On note $-A = \{-a / a \in A\}$.
Montrer que si $A$ est majoré dans $\mathbb{Z}$ alors $-A$ est minoré dans $\mathbb{Z}$ et que $\min(-A) = \max(A)$.

**Exercice 5** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2$ divise $(n+1)^n - 1$ dans $\mathbb{N}$.

**Exercice 6** Soient $a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Montrer que $b - a$ divise $b^n - a^n$ dans $\mathbb{Z}$.

**Exercice 7** Soient $a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$. On note $r_1$ et $r_2$ les restes de la division euclidienne de $a$ et $b$ par $n$ dans $\mathbb{Z}$.
Montrer que les restes de la division euclidienne de $a + b$, $ab$ par $n$ dans $\mathbb{Z}$ sont ceux de $r_1 + r_2$, $r_1 r_2$.
**Application :** Quel est, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de $10^k$ par 9 ?

**Exercice 8** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $d \in \mathbb{N}^*$ et si d divise n dans $\mathbb{N}$, alors $2^d - 1$ divise $2^n - 1$ dans $\mathbb{N}$.

**Exercice 9** Déterminer pour $(a = 600, b = 45)$ puis pour $(a = 19404, b = 385)$ : $d = a \wedge b$ et un couple $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $d = ka + lb$.

**Exercice 10** Déterminer $420 \wedge 98$ puis tous les couples $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $420m + 98n = 0$.
Soient $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. On note $d = a \wedge b \in \mathbb{N}^*$. On pose $a_0 = \dfrac{a}{d}$ et $b_0 = \dfrac{b}{d}$.
Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $am + bn = 0$.

**Exercice 11** Soit $p$ un nombre premier. Montrer que, pour $k \in [\![1; p-1]\!]$, $p$ divise $\dbinom{p}{k}$ dans $\mathbb{Z}$.
Soient $a, b, m \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $p$ divise $(a + b)^p - a^p - b^p$ puis que $p$ divise $m^p - m$ et enfin que si $m \wedge p = 1$ alors $p$ divise $m^{p-1} - 1$.

**Exercice 12**

1. Soient $p$ un nombre premier et $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de $p^k$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers deux à deux distincts. Soient $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. On pose $a = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$.
Déterminer le nombres de diviseurs positifs de $a$ dans $\mathbb{N}$.
Trouver une C.N.S. sur $a \in \mathbb{N}^*$ pour que le nombre de diviseurs positifs de $a$ soit impair.

**Exercice 13** Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, 7 divise-t-il $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ ? Et 11 divise-t-il $2^{10n-7} + 3^{5n-2}$ ?

**Exercice 14** Trouver les nombres entiers relatifs dont le reste est égal au quotient dans la division euclidienne par 23.

**Exercice 15** Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $m \in ]\!]n, +\infty[\![$ , $2^{30}$ divise $m!$ dans $\mathbb{N}$.
Que vaut $\min\left(\{n \in \mathbb{N}^* / 2^{30} \text{divise } n!\}\right)$ ?

**Exercice 16** Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ est sans solution dans $\mathbb{Q}$.

**Exercice 17** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Que vaut $n \vee (2n + 1)$ ?

**Exercice 18** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors $n$ est premier.

**Exercice 19** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^m + 1$ est premier, alors $m$ est une puissance de 2.

**Exercice 20** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant n$. Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \wedge n = 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $r_k = \text{reste}(\ a^k\ ,\ n\ )$.
Montrer que la suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est périodique, puis que 13 divise $3^{126} + 5^{126}$ dans $\mathbb{Z}$.

**Exercice 21** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$, $F_n \wedge F_m = 1$.

**Exercice 22** Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p - 1$ est un nombre premier.
Montrer que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait, i.e. que la somme de ses diviseurs stricts vaut n.

**Exercice 23** On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $p_n$ le $n^{ieme}$ nombre premier.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $p_{n+1} \leqslant p_1 p_2 \dots p_n + 1$. En déduire que $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On note $\pi(x) = \text{Card}(\mathbb{P} \cap [\![0, x]\!])$.
Montrer que si $x$ est « assez grand » , alors $\ln(\ln(x)) \leqslant \pi(x) \leqslant x$.

**Exercice 24** Soient $n \in \mathbb{N}, 2 \leqslant n, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que pour $i \neq j$, on a $a_i \wedge a_j = 1$.
Pour $i \in [\![1; n]\!]$ on note $q_i = a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$.
Montrer que $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = 1$. La réciproque est-elle vraie ? Montrer que $q_1 \wedge \cdots \wedge q_n = 1$.

**Exercice 25** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations $(E1)$ $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$, $(E2)$ $xy = 2x + 3y$ et $(E3)$ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$.

**Exercice 26** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les systèmes d'équations : $(S1) \left\{ \begin{array}{l} x \wedge y = 12 \\ x \vee y = 420 \\ x > y > 20 \end{array} \right.$ et $(S2) \left\{ \begin{array}{l} x + y = 56 \\ x \vee y = 180 \\ x < y \end{array} \right.$ .

**Exercice 27** Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que si $x \wedge y + x \vee y = x + y$, alors $x \mid y$ ou $y \mid x$.

**Exercice 28** Trouver $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \neq 0$ et $\overline{aabb}$ soit un carré. *(On rappelle que $\overline{aabb} = a10^3 + a10^2 + b10 + b$.)*

# 12 Le corps des nombres réels

**Exercice 1** Soit $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$, toutes les deux non vide. On définit les ensembles

$$A+B=\{a+b \mid a\in A \text{ et } b\in B\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \exists(a,b)\in A\times B \text{ tel que } x=a+b\}$$

$$\text{et } A.B=\{ab \mid a\in A \text{ et } b\in B\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \exists(a,b)\in A\times B \text{ tel que } x=ab\}.$$

1. On suppose que $A$ et $B$ sont minorées dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $A$, $B$ et $A+B$ admettent une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ et que $\inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)$.
2. On suppose que $A$ et $B$ sont majorées et de plus incluses dans $\mathbb{R}_+$.
   Démontrer que $A$, $B$ et $A.B$ admettent une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et que $\sup(A.B)=\sup(A)\sup(B)$.
   Application : montrer que si $A\subset\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda\geqslant 0$, $\sup\{\lambda.a\mid a\in A\}=\lambda\sup(A)$.
3. On suppose que pour tous $a\in A$ et $b\in B$, $a\leqslant b$.
   Démontrer que $A$ admet une borne supérieure, que $B$ admet une borne inférieure et que $\sup(A)\leqslant\inf(B)$.

**Exercice 2** Déterminer les bornes supérieures et inférieures éventuelles de $A=\{\frac{1}{n}+(-1)^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$.

**Exercice 3** Déterminer la borne inférieure éventuelle de $B=\{E(x)+E(\frac{1}{x})\mid x\in]0;+\infty[\}$.

**Exercice 4** Démontrer, pour tous réels non nuls $a,b,c,d$ l'équivalence entre les énoncés :

(i) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\in\mathbb{R}_+$ ;

(ii) $\forall(m,n)\in{\mathbb{N}^*}^2$, $ma<nb\Leftrightarrow mc<nd$.

**Exercice 5** Soit $n,p$ des entiers naturels tels que $2\leqslant p\leqslant n-1$. Écrire à l'aide de factorielles les nombres suivants : $A_{n,p}=\displaystyle\prod_{k=p}^{n}k$ , $B_{n,p}=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(p+k)$ et $C_{n,p}=\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\frac{(n-p+k)}{k}$.

**Exercice 6** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})$.

**Exercice 7** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Considérons l'application $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(1+x)^n$.

1. Donner une expression développée de $f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. En déduire les valeurs de $R_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$, $T_n=\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}$ et $U_n=\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}$.
3. En considérant $f'$, déterminer les valeurs de : $V_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ et de $W_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}$.

**Exercice 8** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_n$ des nombres réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2=n$.

Démontrer que pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, $x_i=1$.
*Indication : on pourra utiliser la somme* $\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)^2$

**Exercice 9** Montrer que la racine carrée d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.

**Exercice 10** Montrer que

1. pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $E(x)+E(x+y)+E(y)\leqslant E(2x)+E(2y)$ ;
2. pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$ ;
3. pour tous $m,n\in\mathbb{Z}$, $E\left(\dfrac{n+m}{2}\right)+E\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right)=n$.

**Exercice 11** Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right)$.
3. Montrer, plus généralement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$.

**Exercice 12** Pour $p$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$, posons $S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p = \sum\limits_{i=1}^{n} i^p$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la valeur de $S_1(n)$.
   (b) Ecrire une procédure Maple *(utilisant une boucle* `for`*)* qui donne $S_p(n)$ en fonction de $n$ et de $p$.
2. (a) Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $S_{p+1}(n+1) = \sum\limits_{i=0}^{n} (i+1)^{p+1}$.
   (b) En développant $(i+1)^{p+1}$ pour $i = 0, 1, 2, ..., n-1, n$, puis en pensant à intervertir les sommations, démontrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $p \geqslant 2$, nous avons :
   $$(n+1)^{p+1} = (n+1) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_k(n) + (p+1) S_p(n).$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer, en utilisant la formule précédente, $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ et $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ sous forme de produits dépendants de $n$.

**Exercice 13** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(m, M) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $(a_j, b_j) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant j \leqslant n$.

1. Supposons que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $m \leqslant \dfrac{b_j}{a_j} \leqslant M$.
   (a) Déterminer le signe de $(b_j - m a_j)(M a_j - b_j)$. Développer l'inégalité obtenue.
   (b) Démontrer que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} {b_j}^2 + mM \sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 \leqslant (m+M) \sum_{j=1}^{n} (a_j b_j)$.
   (c) Démontrer que si $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + mMy^2 \geqslant 2\sqrt{mM}xy$. En déduire que $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{n} {a_j}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) \leqslant \frac{(M+m)^2}{4mM} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2$.
2. Soit, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $m \leqslant \alpha_j \leqslant M$.
   (a) Prouver que $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j}\right) \leqslant n^2 \frac{(M+m)^2}{4mM}$.
   (b) Démontrer que $\displaystyle n^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j}\right)$.
   *Indication : on pourra montrer que pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ et que* $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2 = n(n-1)$.

**Exercice 14 (une première monotonie intégrale)**

1. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.
2. Déterminer, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle E\left(\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$.

**Exercice 15** Soit $f$ une fonction de $[0;1]$ dans $[0;1]$ telle que pour tout $(x, y) \in [0;1]^2$, $(\star)\quad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.

1. Montrer que $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f$ qui vérifient la condition $(\star)$.
3. Généraliser ce résultat aux fonctions de $[a;b]$ dans $[a;b]$.

# 13 Suites de nombres

**Exercice 1** Étudier la convergence des suites de termes général :

$$(1) \quad v_n = \frac{\sin n}{n}\,; \qquad (2) \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \textit{(ne pas essayer de calculer la limite de } w_n\textit{)}\,;$$

$$(3) \quad u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}_+^*\,; \quad (4) \quad t_n = \frac{n^4 + 3n + 2}{\sin(3n) + 7n^4 + 2}.$$

**Exercice 2** Étudier la suite définie pour tout entier $p \geqslant 1$ par $u_{2p} = 1 + \dfrac{1}{p}$ et $u_{2p+1} = 1 - \dfrac{1}{p^2}$.

**Exercice 3** La suite produit de deux suites réelles minorées est-elle minorée ?

**Exercice 4** Montrer qu'une suite à valeurs réelles croissante à partir d'un certain rang est minorée.

**Exercice 5** Soit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n - \dfrac{u_{3n}}{3} = 1$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite est $\frac{3}{2}$.
2. En considérant la suite de terme général $u_{3^n} - \dfrac{3}{2}$, montrer que la suite $u$ est stationnaire.

**Exercice 6** Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Définissons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = a \text{ et } u_1 = b\,; \\ \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}. \end{cases}$

1. Définissons la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_n = u_n - u_{n-1}$. Exprimer, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $v_{n+1}$ à l'aide de $v_n$.
   En déduire, pour $n \geqslant 1$, une expression de $v_n$ en fonction de $n$, $a$ et $b$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite en fonction de $a$ et $b$.

**Exercice 7** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$.

1. Montrer que, si $\ell < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que, si $\ell > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 8** Pour $a \in \mathbb{R}$, étudier la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ka}{n}}$.

**Exercice 9** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que si $\alpha \in ]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, alors $(1 - \alpha)^n > 1 - n\alpha$.
2. En prenant $\alpha = \dfrac{1}{n^2}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En prenant $\alpha = \dfrac{1}{6n+1}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
4. Conclure.

**Exercice 10** Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $u_{n,k} = \sin(\dfrac{k}{n})\sin(\dfrac{k}{n^2})$.

1. Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
2. En déduire un encadrement, si elle existe, de la limite de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} u_{n,k}\right]$.

**Exercice 11 (Sur la moyenne de Cesaro)** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombre réels.

On définit la suite $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $c_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. (a) Rappeler la définition quantifiée de « $u$ est bornée » .
   (b) Démontrer que si $u$ est bornée, alors $c$ est bornée.
2. (a) Démontrer que si $u$ est croissante, alors il en est de même pour $c$.
   (b) Démontrer que si $u$ est monotone, alors il en est de même pour $c$.
3. On suppose dans cette question que $u$ est croissante.
   (a) Donner une Condition Nécessaire et Suffisante (C.N.S.) pour que $u$ soit convergente.
   (b) Démontrer que si $u$ converge alors $c$ converge.
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \leqslant u_n \leqslant 2c_{2n} - c_n$.
   (d) En déduire que $u$ converge vers $\ell$ si et seulement si $c$ converge vers $\ell$.
4. (a) Dans le cas général, démontrer que si $u$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $c$ converge vers $\ell$.
   (b) En déduire alors que, si $\ell$ n'est pas nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \sim n\ell$.
   (c) Démontrer à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse.
5. Démontrer que si la suite $u$ tend vers $+\infty$, alors $c$ tend vers $+\infty$. Qu'en est-il si $u$ tend vers $-\infty$ ?

**Exercice 12** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels vérifiant pour tout naturel $n$, $0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{3^n}$.

1. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner un encadrement de sa limite.

**Exercice 13 (Avec décomposition d'une fraction rationnelle)**

1. Déterminer des réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout entier $k \geqslant 3$, $\dfrac{1}{k(k-1)(k-2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1} + \dfrac{c}{k-2}$.
2. Utiliser ce qui précède pour calculer, pour $n \geqslant 3$, $F_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k-1)(k-2)}$.
3. En déduire la convergence et la limite de la suite $(F_n)_{n\geqslant 3}$.
4. En étudiant la monotonie de $(F_n)_{n\geqslant 3}$, en déduire que cette suite est majorée par sa limite.
5. Posons, si $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.
   (a) Étudier la monotonie de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) A l'aide de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, majorer $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Conclusion ?
   (d) En adaptant cette méthode, démontrer la convergence de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

**Exercice 14 (Une suite homographique)** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5} \text{ si } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

*Remarque : on suppose que $a$ est choisi de telle façon que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, i.e. $u_n \neq -5$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1. Définissons l'application numérique $f$ par $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+5}$. Démontrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R} - \{-5\}$ sur $\mathbb{R} - \{4\}$. Calculer $f(-2)$ et en déduire que si $x \neq -2$ et $x \neq -5$, alors $f(x) \neq -2$.
2. Montrer que si $a \neq -2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -2$.
3. Supposons $a \neq -2$ et définissons $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

   (b) En déduire, si $n \in \mathbb{N}$, $v_n$ en fonction de $n$ et de $a$.
   (c) En déduire, si $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ en fonction de $n$ et de $a$.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Quelles valeurs de $a$ peut-on choisir pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit définie ?

*Remarque : cette méthode s'applique à toutes les suites du type* $u_{n+1} = \dfrac{\alpha u_n + \beta}{\gamma u_n + \delta}$, *dans le cas* $\alpha \neq \beta$.

**Exercice 15 (suite récurrente)** Définissons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) = (1-u_n)^2. \end{cases}$

1. Tracer $f$ puis en déduire le placement des termes $u_n$.
2. Étudier les suites extraites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 16 (suites extraites)** Soit $u = (u_n)$ une suite réelle telle que les suites extraites $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ convergent. Démontrer que $u$ converge.

**Exercice 17 (des encadrements)** En utilisant des encadrements, déterminer les limites des suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ ;
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$ ;
3. $w_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(kx)$, $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 18 (des suites conjointes)**

1. Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites réelles telles que $\lim(u_n + v_n) = 3$ et $\lim(u_n - v_n) = 1$.
   Montrer que $u$ et $v$ convergent et déterminer leur limite.
2. Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites réelles telles que $\lim({u_n}^2 + {v_n}^2 + u_n v_n) = 0$.
   Montrer que $u$ et $v$ convergent et déterminer leur limite.
3. Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites réelles telles que $\lim(u_n + v_n) = 0$ et $\lim(e^{u_n} + e^{v_n}) = 2$.
   Montrer que $u$ et $v$ convergent toutes les deux vers 0.
   *on pourra étudier les suite* $a_n = e^{u_n}$ *et* $b_n = e^{v_n}$.

**Exercice 19 (recherches d'équivalents)** Déterminer la limite puis un équivalent des suites définies par :

1. $u_n = E(n\sqrt{n+1}) - E(n\sqrt{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ;
2. $v_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{e^{-v_n}}{n+1}$.

**Exercice 20 (lemme de l'escalier)**

1. Montrer que si $\lim(u_{n+1} - u_n) = \ell$, alors $u_n \sim n\ell$.
2. On suppose que pour tout naturel $n$, $u_n > 0$ et que $\lim\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell$. Montrer que $\lim\left({u_n}^{\frac{1}{n}}\right) = \ell$.

**Exercice 21** On suppose que pour tout $(n,k) \in {\mathbb{N}^*}^2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$.
Montrer que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 22** Les premiers termes de la suite $(u_n)$ sont $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$.
Déterminer, pour tout naturel $n$, $u_n$.

# 14 Algèbre linéaire (1)

On notera toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I Manipulations de bases dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

**Exercice 1** Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on définit $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$, $G = \text{Vect}(u)$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ . Démontrer que $F$ est un s.e.v de $E$, puis montrer que ces deux s.e.v $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$.

**Exercice 2** Soit l'application $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x-y, y+2x, x)$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$, déterminer son noyau et son image.

**Exercice 3** Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure canonique de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v} = (0,1,1)$ et $\overrightarrow{w} = (1,0,1)$.
   (a) Démontrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est libre.
   (b) Démontrer que $E = \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
2. Posons $V = \{\overrightarrow{x} = (x_1,x_2,x_3) \in E | x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
   (a) Démontrer que $V$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et que $V = \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   (b) Posons $W = \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{w} = \{\lambda.\overrightarrow{w} | \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\overrightarrow{w})$.
   Justifier que $W$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et démontrer que $V$ et $W$ sont supplémentaires.
3. Soit l'application $f$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 - x_3$.
   (a) Démontrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
   (b) Démontrer que $\ker(f) \cap V = \text{Vect}(\overrightarrow{v})$. $f$ est-elle une injection ?
   (c) $f$ est-elle une surjection de $E$ sur $\mathbb{R}$ ?
4. Soit l'application $g$ de $E$ dans $E$ définie par $g(x_1,x_2,x_3) = (x_2+x_3, x_1, x_2)$.
   Démontrer que $g$ est un automorphisme de $E$.
5. Posons $h = f \circ g$.
   (a) Si $\overrightarrow{x} = (x_1,x_2,x_3) \in E$, déterminer $h(\overrightarrow{x})$.
   (b) Justifier (sans calculs) que $h$ est une application linéaire et déterminer $\ker(h)$. $h$ est-elle une injection ?

**Exercice 4** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour $\alpha = 0$, montrer que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est libre.
2. À quelle condition portant sur $\alpha$, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont-ils libres ?
3. Déterminer une condition sur les réels $x$, $y$ et $z$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{w} = (x,y,z)$ soient liés.

**Exercice 5 (une diagonalisation)** Soit $f$ une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$f(x,y,z) = (y+z, -x+2y+z, -x+y+2z)$.

1. Démontrer que $f \in \text{GL}(\mathbb{R}^3)$.
2. Posons $E_1 = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$.
   (a) Démontrer que $E_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que $E_1$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une équation cartésienne.
   (c) Donner deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ de $E_1$ tels que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ soit libre dans $\mathbb{R}^3$.
3. Posons $E_2 = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}\}$.
   (a) Démontrer que $E_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Vérifier que $E_2 \neq \{\overrightarrow{0}\}$ : donner un vecteur $\overrightarrow{v}$, non nul, de $E_2$.
   (c) Montrer que $E_2 = \mathbb{R}.\overrightarrow{v} = \{\lambda.\overrightarrow{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
4. Démontrer que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
5. Démontrer que $E_1$ et $E_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   En déduire une façon de calculer $f(\overrightarrow{x})$, puis $f^n(\overrightarrow{x})$ pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, $n \in \mathbb{N}$.

## II Applications linéaires

**Exercice 6** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\operatorname{Id}_E$.

1. Soit $u \in E$, $u \neq \overrightarrow{0}_E$. Démontrer que la famille $(u, f(u))$ est libre.
2. Notons $F_u = \operatorname{Vect}(u, f(u))$.
   (a) Vérifier que $F_u$ est stable par $f$ *(i.e.* $\forall \overrightarrow{x} \in F_u$, $f(\overrightarrow{x}) \in F_u$*)*.
   (b) Démontrer que $F_u$ est le plus petit (pour l'inclusion) sous espace vectoriel de $E$ stable par $f$ et contenant $u$.
3. Soit $v \in F_u$ tel que $v \neq \overrightarrow{0}_E$. Démontrer que $F_u = F_v$ (où $F_v = \operatorname{Vect}(v, f(v))$).
4. Soit $G$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$ et tel que $u \notin G$. Posons $V = G + F_u$.
   Démontrer que $V = G \oplus F_u$ et que $V$ est stable par $f$.

**Exercice 7** Soit $E$, $F$, $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer l'équivalence entre les énoncés :

(i) $\operatorname{Im}(h \circ f) \subset \operatorname{Im}(h \circ g)$ ;

(ii) $\operatorname{Im}(f) + \ker(h) \subset \operatorname{Im}(g) + \ker(h)$ .

**Exercice 8**

1. Soient $E$, $F$ et $G$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$ et $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
2. Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Rappelons que $f^2 = f \circ f$.
   (a) Démontrer l'équivalence entre les énoncés :
      (i) $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{\overrightarrow{0}_E\}$
      (ii) $\ker(f) = \ker(f^2)$.
   (b) Démontrer l'équivalence entre les énoncés :
      (i) $\operatorname{Im}(f) + \ker(f) = E$
      (ii) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$.

**Exercice 9 (Noyaux itérés)**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier $p$, on note $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$, $K_p = \ker(f^p)$ et $I_p = \operatorname{Im}(f^p)$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Établir que $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
   Montrer que $K_{r+1} = K_{r+2}$ puis que pour tout $s \geqslant r$, $K_s = K_r$.
3. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_r = I_{r+1}$. Montrer que$I_{r+1} = I_{r+2}$ puis que pour tout $s \geqslant r$, $I_s = I_r$.
4. Exhiber une application linéaire telle qu'il existe un $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_r = I_{r+1}$ mais $K_r \neq K_{r+1}$.

**Exercice 10 ($(x, f(x))$ liée pour tout $x$)** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée. Montrer que $f$ est une homothétie (c'est-à-dire que $f = \lambda \operatorname{Id}_E$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$).
2. On suppose que pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer que $f$ est alors une homothétie.
   (a) Soit $x \in E$, $x \neq 0$ ; et soit $F$ un supplémentaire de $\operatorname{Vect}(x)$ dans $E$. On considère $p$ le projecteur sur $\operatorname{Vect}(x)$, parallèlement à $F$. En utilisant l'hypothèse sur $f$ en déduire que $f(x) \in \operatorname{Vect}(x)$, et donc que $(x, f(x))$ est liée.
   (b) En déduire que $f$ est une homothétie.

**Exercice 11 (un lemme de factorisation)**
Soient $E, F, G$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose dans cet exercice que tout sous-espace vectoriel d'un de ces espaces possède un supplémentaire. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(i) $\ker(f) \subset \ker(g)$ ;
(ii) il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $g = h \circ f$.

**Exercice 12 (un second lemme de factorisation)**
Soient $E, F, G$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose dans cet exercice que tout sous-espace vectoriel d'un de ces espaces possède un supplémentaire. Soient $h \in \mathcal{L}(F, G)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(i) $\operatorname{im}(g) \subset \operatorname{im}(h)$ ;
(ii) il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $g = h \circ f$.

## III Sous-espaces vectoriels, sommes et supplémentaires

**Exercice 13** L'ensemble $F$ des différences de deux fonctions croissantes est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ?

**Exercice 14 (union et s.e.v)** Soit $E$ un espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

**Exercice 15 (intersection et somme de s.e.v.)** Soit $E_1$, $E_2$ et $E_3$ trois s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

1. Rappeler la définition de $E_1 + E_2$. Démontrer que $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. Démontrer que $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
3. Démontrer l'inclusion $E_1 + (E_2 \cap E_3) \subset (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3)$.
4. Démontrer l'inclusion $(E_1 \cap E_2) + (E_1 \cap E_3) \subset E_1 \cap (E_2) + E_3)$.

**Exercice 16** Soient $E$, $F$ et $G$ trois sous-espaces vectoriels d'un même espace, tels que $F \subset G$, $E \cap F = E \cap G$ et $E + F = E + G$. Montrer que $E = F$.

**Exercice 17** Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\}$ et $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 0\}$. Démontrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, et qu'ils sont supplémentaires.

**Exercice 18** Dans $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, on note $A = \{\text{applications constantes}\}$ et $B = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 0\}$. Démontrer que $A$ et $B$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, et qu'ils sont supplémentaires.

**Exercice 19** Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note $F = \{f \in E \mid f \text{ est de période } 1\}$ et $G = \{f \in E \mid \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = 0\}$. Démontrer que $F$ et $G$ sont des s.e.v de $E$, qu'ils sont en somme directe *(i.e. $F \cap G = \{O_E\}$)*. mais non supplémentaires.

**Exercice 20** Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$.

## IV projecteurs et symétries

**Exercice 21** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ définit par $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2)$.

1. Démontrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Démontrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. L'application $f$ est-elle un projecteur ?
4. Déterminer l'expression de la projection sur $\ker(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$.

**Exercice 22** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f, g$ des projecteurs de $E$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Démontrer que $h = f \circ g$ est un projecteur de $E$ et préciser son image en fonction de celles de $f$ et $g$.

**Exercice 23** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p$, $q$ deux projecteurs définis sur $E$.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Interpréter cette condition en terme de noyaux et d'images de $p$ et $q$.
3. Si $p + q$ est un projecteur, expliciter $\mathrm{Im}(p + q)$ et $\ker(p + q)$.

**Exercice 24** Soit $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$ tels que $p \circ q = 0$. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur, que $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$ et que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

**Exercice 25** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $p$ un projecteur de $E$. Montrer l'équivalence entre les énoncés :

(i) $f \circ p = p \circ f$ ;
(ii) $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par $f$.

**Exercice 26** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $G$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ de cardinal $n$. On pose $f = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{u\in G} u$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Calculer, pour $v \in G$, $f \circ v$.
3. Démontrer que $f$ est un projecteur de $E$

# 15 Polynômes à une indéterminée

## I calculs et divisibilité

**Exercice 1** Montrer tout entier $n \geqslant 1$ les égalités suivantes :

1. $(X^3+X^2+X+1) \times \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k X^k = (-1)^n X^{n+3} + (-1)^n X^{n+1} + X^2 + 1$ ;
2. $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k = (1-X^3)^n$.

**Exercice 2** Montrer, de plusieurs manières, que

1. $X^2-5X+6$ divise $(X-2)^{2n}+(X-3)^{2n}-1$ ;
2. $X^2-X+1$ divise $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$ ;
3. $2X^3+3X^2+X$ divise $(X+1)^{2n}-X^{2n}-2X-1$ ;
4. pour $n$ impair, $X^2+2\cos(t)X+1$ divise $P_n(X) = \cos((n-1)t)\, X^{n+1} + \cos(nt)\, X^n + \cos(t) X + 1$.

**Exercice 3** Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Notons $(q, r)$ le couple quotient/reste de la division euclidienne de $m$ par $n$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$.En déduire une C.N.S. portant sur $n$ et $m$ pour que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

**Exercice 4** Soient $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $P = (\cos\theta + X \sin\theta)^n$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $P$ par $X^2+1$.

**Exercice 5** Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ :

1. $X^6-1$ ;
2. $X^5+1$ ;
3. $X^6+2X^4+2X^2+1$ ;
4. $X^9+X^6+X^3+1$ ;
5. $(X^2-X+2)^2+(X-2)^2$.
6. $(X^2-X+1)^2+1$.

## II questions de racines

**Exercice 6** Si $n$ est un entier $\geqslant 2$, posons $P_n = X^n + X^{n-1} + \ldots + X^2 + X - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $P_n$ posséde une unique racine dans $[0, +\infty[$. Notons cette racine $x_n$.
2. Étudier la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$.
   *Indication : utiliser les variations de $x \mapsto P_{n+1}(x)$ pour montrer que $x_n \geqslant x_{n+1}$. En déduire la convergence de $(x_n)_{n \geqslant 2}$. Noter $\alpha$ la limite. Transformer ensuite $P_n(x_n) = 0$ pour, à la limite, obtenir une équation vérifiée par $\alpha$. En déduire $\alpha$.*

**Exercice 7** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 comme racine des polynômes
$P(X) = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ et $Q(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

**Exercice 8** Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.
Est-ce vrai pour tous les polynômes à coefficients réels de degré $\geqslant 4$ ?

**Exercice 9** Résoudre le systéme : $\begin{cases} x+y+z = 2 \\ xyz = -1/2 \\ 1/x + 1/y + 1/z = 1/2 \end{cases}$

**Exercice 10** Soit $n$ un entier $\geqslant 2$. Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ admet-il une racine multiple ?

**Exercice 11** Déterminer $a$ pour que le polynôme $P = X^5 + aX^2 + 15X - 6i$ ait une racine triple puis factoriser $P$.

**Exercice 12** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que $x \mapsto (P'(x))^2 - P(x)P''(x)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
*Indication : écrire $P = \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_i)$, calculer $P'$ sous la forme d'une somme et considérer $P'/P$.*

**Exercice 13** Soit $a > 1$ un réel. Montrer que la partie réelle des racines de $P(z) = z^3 + az^2 + az + a$ est négative.

**Exercice 14** Soit $P(X) = 2X^2 + 2X + c$. Déterminer $c$ tel que $r$ soit racine complexe de $P$ avec $|r| = 1$

**Exercice 15 (du calcul)** Soit $n$ un entier $\geqslant 2$ et $P = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Calculer le polynôme dérivé $P'$. Donner le degré de $P'$.
2. Montrer que $z$ est racine de $P'$ si et seulement si $(1+\frac{1}{z})$ est une racine $n$-iéme de l'unité autre que 1.
3. Montrer que les racines de $P'$ sont donner par $\frac{1}{z} = \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1\right] + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
4. En déduire que les racines de $P'$ sont les $z_k = \frac{1}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.e^{-i[\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}]}$, pour $k \in \{1,\dots,n-1\}$.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante vérifiée par une racine multiple de $P$ (i.e. d'ordre $\geqslant 2$).
6. En déduire que $P$ posséde une racine multiple si et seulement si $\lambda = \frac{(-1)^{k+n} i^n}{\left(2\sin(\frac{k\pi}{n})\right)^n}$, pour $k \in \{1,\dots,n-1\}$.

**Exercice 16** Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on définit le polynôme $Q(X) = (X^2+1)P(X)P'(X) + X\left(P^2(x) - P'^2(X)\right)$. Montrer que si $P$ a $n$ racines réelles distinctes et strictement supérieures à 1, alors $Q$ a au moins $2n-1$ racines réelles distinctes.

**Exercice 17** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout complexe $x$, $T_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$. Déterminer les racines de $T_n$.

**Exercice 18 (fonctions symétriques)** Soient $x_1$, $x_2$ et $x_3$ les racines de $P = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$. Déterminer l'unique polynôme unitaire de racines $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$ et $x_1 + x_3$.

## III Arithmétique

**Exercice 19** Déterminer le PGCD dans $\mathbb{Q}[X]$ du couple ( A(X) , B(X) ) pour

$$A(X) \;=\; 2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1 \quad , \quad B(X) \;=\; 3X^3 + 4X^2 + 4X + 1 \,.$$

$$A(X) \;=\; X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 2X + 2 \quad , \quad B(X) \;=\; X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 7X + 6 \,.$$

**Exercice 20** Exprimer pour tous $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,+\frac{\pi}{2}\right[$ , $p \in \mathbb{N}^*$ , $\frac{\cos(px)}{\cos(x)^p}$ et $\frac{\sin(px)}{\cos(x)^p}$ comme des polynômes de tan(x).

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , les décompositions irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes :

$$A_n(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}X^k, B_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{2k+1}X^k, P_n(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k}X^k, Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^k.$$

**Exercice 21**

Soient $a, b \in K$ , $a \neq b$ , $p, q \in \mathbb{N}^*$ .

1. Développer $(b-a)^{p+q-1} \;=\; [\;(X-a) - (X-b)\;]^{p+q-1}$ .
2. Déterminer $U(X), V(X) \in K[X]$ tels que $(X-a)^p\,U(X) \;+\; (X-b)^q\,V(X) \;=\; 1$ .
3. Déterminer $U_o(X), V_o(X) \in K[X]$ tels que, de plus, $deg(U_o) < q$ et $deg(V_o) < p$ .

**Exercice 22** On considère le problème $(\mathcal{P})$ « Trouver $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\begin{cases} \text{reste } (P(X)\,,\,(X-1)^3) \;=\; -1 \\ \text{reste } (P(X)\,,\,X^4) \;=\; -2 \end{cases}$ » .

1. Montrer que si $P_o(X)$ vérifie $(\mathcal{P})$, alors l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} \;=\; P_o + X^4(X-1)^3\mathbb{K}[X]$ .
2. Trouver $U_o(X), V_o(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que $(X-1)^3U_o(X) + X^4V_o(X) \;=\; 1$ , $deg(U_o) < 4$ , $deg(V_o) < 3$ .
3. Sans tenir compte de la question 2, déterminer $P_o \in \mathbb{K}_6[X] \cap \mathcal{S}$ , en utilisant la dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ .

**Exercice 23** Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

**Exercice 24** Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $(X^2+1)P''(X) - 6P = 0$.

# 16 Fonctions numériques (1)

## I Limites et continuité ponctuelle

**Exercice 1** Démontrer que si une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est périodique et admet une limite $\lambda$ en $+\infty$, alors $f$ est constante.

**Exercice 2** Soit $f$ une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}$ telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

**Exercice 3 (des limites)** Etudier les limites des fonctions suivantes :

1. $x\mapsto \dfrac{x^4+3x^3+32x+5}{2x^6+3}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en $0$ ;
2. $x\mapsto \sqrt{x^2+4x+1}-x$ en $+\infty$ et en $0$ ;
3. $x\mapsto \dfrac{\sin(x^4)}{x^6}$ en $0$ ;
4. $x\mapsto 3x^2\dfrac{\sin(x^8)}{x^6}$ en $0$ ;
5. $x\mapsto \dfrac{\cos(x^4)-1}{x^6}$ en $0$ ;
6. $x\mapsto \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$ en $0$ ;
7. $x\mapsto \dfrac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{\sin(x)-x}$ en $0$ ;
8. $x\mapsto \dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(\pi x)}$ en $1$ ;
9. $x\mapsto \dfrac{e^{x^4}-1}{x^3}$ en $0$ ;
10. $x\mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ en 0.
11. $x\mapsto x\tan x-\dfrac{\pi}{2\cos x}$ en $\Pi/2$ ;
12. $x\mapsto \dfrac{\cos(\pi/4-x)-\tan(x)}{1-\sin(\pi/4+x)}$ en $\pi/4$ ;
13. $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}-\dfrac{1}{\sqrt{-5x-10}}$ en $-2^-$ ;
14. $x\mapsto \dfrac{e^x-e}{x^3+x^2-x-1}$ en $1$ ;
15. $x\mapsto \dfrac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(2x)}$ en $0$ ;
16. $x\mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x$ en $+\infty$.

**Exercice 4** Déteminer les limites (quand elles existent) suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\,\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{E(x)}}{E(x)^x}$.

**Exercice 5** Soient $f:[a;+\infty[\to\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f=0$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application $T$-périodique ($T>0$) telles que $f+g$ est croissante. Montrer que $g$ est constante.

**Exercice 6** Etudier les points de continuité des fonctions suivantes définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

1. $x\mapsto \begin{cases}\sin\frac{1}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ sinon;}\end{cases}$
2. $x\mapsto \begin{cases}x\sin\frac{1}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ sinon;}\end{cases}$
3. $x\mapsto \begin{cases}1 \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 \text{ sinon;}\end{cases}$
4. $x\mapsto \begin{cases}x \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 \text{ sinon;}\end{cases}$

**Exercice 7** E désigne la fonction partie entière.

1. Étudier la continuité en tout point de $\mathbb{R}$ de la fonction $f:x\mapsto f(x)=\mathrm{E}(x)+\sqrt{x-\mathrm{E}(x)}$.
2. Déterminer l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\,\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

**Exercice 8** Déterminer les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continues en 0 telles que

1. $\forall x\in\mathbb{R}\ f(\frac{x}{2})=f(x)$.
2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$.
3. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$.

**Exercice 9** On suppose que $f$ est une application continue en 0 telle que pour tout $x$ réel, $f(2x)=f(x)\cos(x)$.
Déterminer $f$.

## II continuité sur un intervalle

**Exercice 10** Étudier le nombre de solutions des équations suivantes, les localiser dans un intervalle de longueur 1 puis en donner une valeur approchée à $10^{-1}$ par dichotomie.

1. $x^3 - 9x^2 + 24x - 17 = 0$ ;
2. $x^2 + \sqrt{x} - 3 = 0$.

**Exercice 11** Soit $D$ une partie dense dans $\mathbb{R}$. Démontrer que si une fonction $f$ continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'annule sur $D$ *(i.e. pour tout $r \in D$, $f(r) = 0$)*, alors $f$ est la fonction nulle.

**Exercice 12** Démontrer que l'équation $x^2 \cos(x) + x \sin(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 13** On considére, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'application $h_n : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie pour $x > 0$ par $h_n(x) = \dfrac{xe^{-x}}{x^n} - x^n$, et l'application $\varphi_n : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par pour $x > 0$ par $\varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\forall x > 0$, $h_n(x) = 0$ si et seulement si $\varphi_n(x) = 0$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée $u_n$, et que : $0 < u_n < 1$.
2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$.
   (b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

**Exercice 14** Soient $f$ et $g$ définies et continues sur $I$. Montrer que $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues sur $I$.

**Exercice 15** Construire une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$ est telle que $|f|$ soit continue.

**Exercice 16 (bornée et limites à l'infini)** Soit $f$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell' \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que $f$ est bornée. Les bornes de $f$ sont-elles atteintes ?
2. On suppose maintenant que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Montrer que $f$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 17** Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $2\pi$-périodiques et 1-périodiques.

**Exercice 18** Soit $f : [a, b] \to [a, b]$, continue. Montrer que $f$ a au moins un point fixe. Qu'en est-il si on ne suppose plus $f$ continue mais que $f$ est croissante ?

**Exercice 19** Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\lim_a f = \lim_b f = l \in \bar{\mathbb{R}}$. Prouver que $f$ n'est pas injective.

**Exercice 20** Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_n \in [0, 1], f(\alpha_n + \frac{1}{n}) = f(\alpha_n)$.

**Exercice 21**

1. Démontrer que si $f$ est une bijection continue d'un intervalle $I$ sur un intervalle $J = f(I)$, alors $f$ est strictement monotone.
2. En déduire qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 22** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x) = l$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.

## III Continuité uniforme

**Exercice 23** Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ soient réelles. Montrer que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 24** Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique. Montrer que $f$ est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 25** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue.
Montrer qu'il existe $A$ et $B$ deux réels tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant A|x| + B$. Montrer que la réciproque est fausse.

**Exercice 26 (u-continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$)**

1. Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est u-continue sur $[1; +\infty[$.
2. Généraliser en montrant que pour tout $\varepsilon > 0$, $f$ est u-continue sur $[\varepsilon; +\infty[$.
3. Montrer que $f$ n'est pas u-continue sur $]0; +\infty[$.

## IV Dérivabilité

**Exercice 27** Soit $f$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $f$ est paire (*resp.* impaire), alors $f'$ est impaire (*resp.* paire).
2. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $f$ est $T$-périodique, alors $f'$ l'est aussi.

**Exercice 28** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui a la même limite en $+\infty$ et $-\infty$.

1. Posons $g = f \circ \tan$. Justifier que $g$ est définie et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que $g$ peut-être prolongée en une fonction continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On appelera encore $g$ cette nouvelle fonction.
3. Montrer qu'il existe $c \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $g'(c) = 0$.
4. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

**Exercice 29** Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f'(x) + f(x)) = 0$. Montrer qu'alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

**Exercice 30** Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Etablir les inégalités : $\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

**Exercice 31** Construire, pour chacune des fonctions $f$ suivantes, le tableau des variations de $f$. Dire quand $f$ n'est pas définie en un point, si elle est prolongeable en ce point. Pour trouver le signe de $f'(x)$, on pourra être amené à déterminer, à l'aide d'un autre tableau de variations, le signe d'une fonction auxiliaire.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ | 2) $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ | 3) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ | 4) $f(x) = (1+x)\sqrt{1+x}$ |
| 5) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ | 6) $f(x) = x^x$ | 7) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ | 8) $f(x) = x^{1/(x-1)}$ |

*On rappelle que $x^y = e^{y \ln(x)}$.*

**Exercice 32** Déterminer la valeur de la dérivée $n^{\mathrm{e}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ ; 2. $g : x \mapsto (1+x)^p$ ; 3. $h : x \mapsto x^2(1+x)^n$ ; 4. $m : x \mapsto e^x \cos(x)$.

**Exercice 33 (Accroissements finis et limites de fonctions)** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $I = [a, +\infty[$ et dérivable sur $I$.

1. Soit $\lambda > 0$. Démontrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lambda$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Démontrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

**Exercice 34** Montrer que pour tout $x > 0$, $\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$. puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.

**Exercice 35** Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, $(a, b > 0)$ ; 2. $g(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ ; 3. $h(x) = \dfrac{(1 - \cos(x))\ln(1 + x^2)}{x^2 \sin^2(x)}$ ;

**Exercice 36** Etudier la continuité et la dérivabilité de $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.
En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

**Exercice 37** Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = n\left(3^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

**Exercice 38** Soit $f$ une fonction $I \to \mathbb{R}$, dérivable deux fois sur l'intervalle $I$. Soit $a < b < c$ des éléments de $I$.
Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-c)(a-b)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(d).$$

*(On pourra définir la fonction $\varphi : x \mapsto (b-a)f(x) + (a-x)f(b) + (x-b)f(a) + \dfrac{A}{2}(a-b)(a-x)(x-b)$ et choisir judicieusement A.)*

**Exercice 39** On suppose $f$ dérivable en $x_0$. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f^2(x_0 + 3h) - f^2(x_0 - 3h)}{h}$.

# 17 fonctions numériques (2)

## I Développements limités

**Exercice 1** Déterminer le développement limité à l'ordre $n$ en 0 de la fonction $f$ dans les cas suivant :

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sin(x)}$ (n=5) ;
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ (n=4) ;
3. $f(x) = \tan^2(x)$ (n=5) ;
4. $f(x) = e^{x\sin(x)}$ (n=6) ;
5. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ (n=3) ;
6. $f(x) = \sqrt{1+\sin(x)}$ (n=3).

Réponses : 1) $1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)$ ; 2) $x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$ ; 3) $x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)$ ;
4) $1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)$ ; 5) $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ ; 6) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

**Exercice 2** Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, où $u_n = \left(3\times 2^{\frac{1}{n}} - 2\times 3^{\frac{1}{n}}\right)^n$ ;
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, où $f(x) = \dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-x^{1/3})}$ ;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, où $f(x) = x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})$ ;
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, où $u_n = (n\ln(1+\frac{1}{n}))^n$ ;
5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, où $f(x) = \dfrac{a^a - (a+x)^a}{(a+x)^{a+x} - a^a}$ avec $a > 0$ ;
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, où $f(x) = \mathrm{sh}(\sqrt{x^2+x}) - \mathrm{sh}(\sqrt{x^2-x})$.

**Exercice 3** Calculer le développement limité à l'ordre 5, en 0, de chacune des applications $f : V \to \mathbb{R}$, (où $V$ est un voisinage de 0) définies ci-dessous, pour $x \in V$, par :

1. $f(x) = \mathrm{ch}(2x)\,\mathrm{sh}(3x)$
2. $f(x) = (\ln(1+x))^2$
3. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$
4. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

**Exercice 4** Calculer le développement limité à l'ordre 3, en 0, de chacune des applications $f : V^* \to \mathbb{R}$, (où $V^*$ est un voisinage de 0, privé de 0) définies ci-dessous, pour $x \in V^*$, par :

1. $f(x) = (1+x)^{1/x}$
2. $f(x) = (\cos(2x))^{3/x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

**Exercice 5** Calculer le développement limité à l'ordre 3, en $\pi/2$, de l'application $f(x) = \ln(\sin x)$ et celui à l'ordre 2 en 1 de $g(x) = \sqrt{x}\cos(\pi x)$.

**Exercice 6** Étudier la limite lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$ de

$$F(x) = x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\times x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

## II Étude de fonctions

**Exercice 7** Soit $p, q \in \mathbb{R}$. On définit l'application $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + px + q$.

1. Démontrer que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$
2. On suppose que $p \geqslant 0$. Construire le tableau des variations de $f$ sur $\mathbb{R}$. Combien de solutions de $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ ?
3. On suppose que $p < 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p$ et $q$ pour que l'équation

$$(E) \qquad x^3 + px + q = 0$$

admette dans $\mathbb{R}$ : a) une solution unique ; b) deux solutions ; c) trois solutions.

**Exercice 8** Soit l'application définie par $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.

2. Étudier les variations de $f$ et tracer le graphe représentatif de cette application.

**Exercice 9**

1. Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(\operatorname{th}(x))$.
2. Montrer que $(1 - \operatorname{th}^2)^{1/2} = \operatorname{ch}$ et en déduire que $f' = 0$.
3. Pour quelle valeur de $x$ a-t-on $\operatorname{th}(x) = \dfrac{2}{13}$ ?
4. En déduire que
$$\arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

**Exercice 10**

Soit $f : x \mapsto x \arctan\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{\pi}{2}|x| - x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)$.
2. Montrer que $f(x) = \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4x} + \underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. Étude de la fonction, tracé de la courbe.

**Exercice 11 (D.L. et dérivabilité)**

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$
est dérivable en 0 et par conséquent possède un développement limité à l'ordre 1, en 0, que l'on déterminera.
2. Montrer que $f$ n'est pas deux fois dérivable en 0 et ne possède pas de développement limité à l'ordre 2, en 0.

**Exercice 12 (D.L. et dérivabilité)**

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$
est dérivable en 0 et par conséquent possède un développement limité à l'ordre 1, en 0, que l'on déterminera.
2. Montrer que $f$ n'est pas deux fois dérivable en 0 mais possède un développement limité à l'ordre 2, en 0, que l'on déterminera.

**Exercice 13 (Développement asymptotique de racines de solutions)** Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution $x_n$ dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. Calculer le développement asymptotique à la précision $\dfrac{1}{n^2}$ de $x_n$.

**Exercice 14 (Développement asymptotique de racines de solutions)** Soit $k \in \mathbb{R}$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = k$ a une unique solution $x_k \in \mathbb{R}$. Montrer que $(x_k)$ admet un développement asymptotique en $+\infty$ du type : $x_k = ak + b\ln(k) + c\frac{\ln(k)}{k} + o\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$

## III Fonctions convexes

**Exercice 15** Soient $a < b$ des réels, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $c \in [a;b]$.
Montrer que $(b-a)f(c) \leqslant (c-a)f(b) + (b-c)f(a)$.

**Exercice 16** Montrer que si $f$ est une application convexe et $g$ une application convexe croissante, alors $g \circ f$ est croissante.

**Exercice 17** Montrer que si $h \circ f$ est convexe, alors $f$ est convexe.

**Exercice 18** Montrer que $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^n$, $1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)^{1/n}$.

**Exercice 19** Une fonction $f$ de $I$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est dite logarithmiquement convexe si $\ln f$ est convexe. Montrer que si $f$ est logarithmiquement convexe alors $f$ est convexe.
Étudier la réciproque.

**Exercice 20** Soit une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que si elle est majorée alors nécessairement elle est constante.
Trouver un exemple d'une fonction $f$ convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, majorée et non constante.

**Exercice 21** *Inégalité de Hölder et de Minkowski :* Soient $p$ et $q$ deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ainsi que $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des nombres réels positifs.

1. Montrer que : $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.
2. En déduire que si $\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n y_i^q = 1$, alors $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant 1$.
3. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
4. En déduire l'inégalité de Minkowski : pour tous réels $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$,
$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

**Exercice 22** Soient $p$ et $q$ deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe sur $[0;+\infty]$.
2. Montrer que pour $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1-\frac{1}{p}}$.

**Exercice 23** Soit $f$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que :
$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

# 18 Algèbre linéaire (2) : dimension finie

**Exercice 1** Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $u = (-1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$ et $w = (1, 1, -1)$ de $E$.
Montrer que $(u, v, w)$ est une base de $E$. Exprimer les vecteurs de la base canonique de $E$ dans cette base (i.e comme combinaison linéaire des vecteurs $u, v, w$). Donner les coordonnées du vecteur $(3, 2, 0)$ dans cette base.

**Exercice 2**
Les familles $((1, 3, 4, 7), (5, 3, 1, 4), (4, 0, -3, -3))$ (dans $\mathbb{R}^4$) et $((2, i, 4), (i, -1, -i), (0, 3, -i))$ (dans $\mathbb{C}^3$) sont-elles libres ?

**Exercice 3** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 < a_2 < \cdots < a_n \in \mathbb{R}$.
Montrer que la familles $(x \mapsto e^{a_1 x}, x \mapsto e^{a_2 x}, \ldots, x \mapsto e^{a_n x})$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Exercice 4** On munit $E = \mathbb{R}^3$ de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On pose $\overrightarrow{a_1} = (1, -2, 1)$ et $\overrightarrow{a_2} = (1, 2, -1)$.
Démontrer que la famille $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$ est libre. Déterminer $\overrightarrow{a_3}$ tel que $\mathcal{A} = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$ est une base de $E$ et décomposer dans $\mathcal{A}$ tout vecteur $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $E$.

**Exercice 5** On pose $X = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et on munit $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On définit les éléments $f$, $g$, et $h$ de $E$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $h(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.
Prouver que les familles $(f, g)$, $(g, h)$ et $(f, h)$ sont libres. La famille $(f, g, h)$ est-elle libre ?

**Exercice 6** Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{K}[X]$ est muni de sa structure canonique d'e.v. sur $K$. Soit $\alpha \in K$, et $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que la famille $\Big((X-\alpha)^k\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n} = \Big(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \ldots, (X-\alpha)^n)\Big)$ est une base de l'espace vectoriel $K_n[X]$

**Exercice 7** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur $K$ (différent de $\{0_E\}$) et $f$ un endomorphisme de $E$.
On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Démontrer que $f$ est une homothétie vectorielle, c'est à dire qu'il existe un scalaire $\alpha$ tel que $f = \alpha \operatorname{Id}_E$. *( c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $f(x) = \alpha x$).*

**Exercice 8** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $K$ de dimensions finies , et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

1. On suppose que $\operatorname{Im}(f) = F$. Construire une application linéaire $g$ de $F$ dans $E$ telle $f \circ g = \operatorname{Id}_F$.
2. On suppose que $f$ est injective. Construire une application linéaire $g$ de $F$ dans $E$ telle $g \circ f = \operatorname{Id}_E$.

**Exercice 9** Soit $f$ un endomorphisme d'un $K$-ev de dimension finie $E$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(i) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$ ; (ii) $\operatorname{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$ ; (iii) $\ker(f) = \ker(f^2)$).

**Exercice 10** Soit $n$ un entier naturel $\geqslant 2$. On munit $K^n$ de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $K$, et on définit la famille $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ par :

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & (1, 1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0) \\ a_2 & = & (0, 1, 1, 0, \ldots, 0, 0, 0) \\ \ldots & & \\ a_{n-1} & = & (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 1) \\ a_n & = & (1, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1). \end{array}$$

Déterminer les valeurs de l'entier $n \geqslant 2$ pour lesquelles la famille $\mathcal{A}$ est libre et celles pour lesquelles elle est liée . Dans ce dernier cas, donner une relation de dépendance linéaire de le famille $\mathcal{A}$, c'est-à-dire une famille $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de scalaires non tous nuls telle que $\alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_n a_n = 0_E$.

*Indication : on pourra commencer par traiter les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$. Attention, pour $n = 2$, on a $a_1 = (1, 1)$ et $a_2 = (1, 1)$)*

**Exercice 11** Déterminer le rang de la famille de $\mathbb{R}^4$ : $\mathcal{F} = ((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (-1 - 1, 1, 0), (0, 0, 2, 0))$.

**Exercice 12** Soit $E$ un espace vectoriel complexe et $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de $E$. Montrer que $E$ peut être aussi considéré comme un espace vectoriel réel. Expliciter une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$.

**Exercice 13** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ (où $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2) et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^{n-1} \neq O_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^n = O_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $\big(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{n-1}(u)\big)$ est libre.

**Exercice 14** Donner une base de l'espace des suites à termes complexes vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n - 2u_{n-1}.$$

Même question pour les suites à termes réels.

**Exercice 15** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ sur $K$.

1. Démontrer que si $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $E$, la famille $\mathcal{V} = (u_1, u_1 + u_2, u_3, \ldots, u_n)$ est une base de $E$.
2. Soit $a, b \in E$. On suppose que la famille $(a, b)$ est libre. Construire un automorphisme $g$ de l'espace vectoriel $E$ tel que $g(a) = a$ et $g(b) = a + b$.
3. Application : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $g \in \mathrm{GL}_E$, $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f$ est une homothétie vectorielle. *Indication : par l'absurde, en utilisant l'exercice 7, on suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ est libre. Construire $g$ comme précédemment avec $a = x$ et $b = f(x)$ et en déduire une contradiction.*

**Exercice 16 (noyaux itérés)**
Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Posons $n = \dim_{\mathbb{R}}(E)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Pour tout entier $p$, notons $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$ la composée $p$ fois de $f$, et :

$$K_p = \ker(f^p),\ \alpha_p = \dim_K(K_p) \quad \text{ainsi que} \quad I_p = \mathrm{Im}(f^p),\ \beta_p = \dim_K(I_p).$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Donner une relation liant $\alpha_p$, $\beta_p$ et $n$, et établir que $K_p \subset K_{p+1}$ et que $I_{p+1} \subset I_p$.
2. Déduire de ce qui précède la monotonies éventuelles des suites $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
   En utilisant ceci, montrer que ces suites sont stationnaires à partir d'un certain rang.
3. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
4. Montrer que $I_r = I_{r+1}$.

**Exercice 17** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ sur $K$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

**a)** Démontrer que si $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n$.

**b)** Démontrer que si $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et si $f + g \in \mathrm{GL}(E)$, alors $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.

**Exercice 18** Soit $f : P \mapsto (X^2 - 1)P'(X) - 2XP(X)$, où $P$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
Exprimer le degré de $f(P)$ en fonction de celui de $P$.
Trouver les vecteurs propres de $f$ s'ils existent, c'est à dire des polynômes $P$ tels qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(P) = \alpha.P$ .
L'application $f$ est-elle injective ? Surjective ?

**Exercice 19** Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\backslash\{0, 2\}, \mathbb{R}) \mid x(x-2)f'(x) + 2f(x) = 0\}$.
Montrer que $E$ est un espace vectoriel, en donner la dimension et une base.

**Exercice 20** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie). On considère $\phi_1, \ldots \phi_n \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Montrer l'équivalence entre les énoncés :

(i) la famille $(\phi_1, \ldots \phi_n)$ est libre

(ii) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ \exists v \in E,\ \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \phi_j(v) = x_j$.

**Exercice 21** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n$. Soient $\phi_1, \ldots \phi_s \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Pour tout $j$, on note $H_j = \ker \phi_j$. Montrer que $\mathrm{rg}(\phi_1, \ldots, \phi_s) = n - \dim(H_1 \cap \ldots \cap H_s)$.
Montrer de plus que pour tout $\psi \in E^*$, $\Psi \in Vect(\phi_1, \ldots \phi_s)$ *ssi* $(H_1 \cap \ldots \cap H_s) \subset \ker \psi$

**Exercice 22** Soit $E$ un e.v. de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}\ (E)$.

1. Montrer que si l'on a $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g)$, alors ces sommes sont directes.
2. En prenant $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto P(0)$, établir un contre-exemple en dimension infinie.

**Exercice 23** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (de dimension quelconque) et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que $x \in E$ est un *vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$ si $x \neq 0_E$ et si $f(x) = \lambda.x$.

1. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts et $x_1, ..., x_n$ des vecteurs propres associés à cette valeur propre. Démontrer que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre.

   On suppose dorénavant $E$ de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$. On définit l'application $D$ par $D(h) = h \circ g - g \circ h$.

2. Démontrer que $D \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.
3. Calculer pour tout entier $k$, $D(f^k)$.
4. En déduire que $f$ est nilpotente (*i.e.* $\exists n \in \mathbb{N},\ f^n = 0$).

# 19 Algèbre linéaire (3) : matrices

**Exercice 1** Calculer les produits de matrices $A \times B$ et $B \times A$ dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Réponses : $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 8 & 22 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Réponses : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(P) = (X^2-1)P' - nXP$.

1. Montrer que $u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas $n = 2$, écrire la matrice $A = \operatorname{Mat}_{Can}(u)$, où $Can$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. *(Attention, $A \in M_3(\mathbb{R})$.)*
3. Déterminer le noyau de $u$.
4. Pour quelles valeurs de $n$ l'endomorphisme $u$ est-il un automorphisme ?

**Exercice 3** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\ker(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ et trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ n'a que deux termes non nuls.
2. Calculer $M^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 4** On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $A = \begin{pmatrix} a & a+b & b \\ b & a-b & a+2b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ pour $a$ et $b$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-e.v. $M_3(\mathbb{C})$, et en donner une base et la dimension.

**Exercice 5** Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $B^n$pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer $A$ à l'aide de $B$ et de $I_3$. En déduire $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. En opérant comme dans la question précédente, calculer $C^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 6** On définit $A \in M_3(\mathbb{C})$ par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que pour $A \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{C})$ et déterminer $A^{-1}$
3. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 7** On considére la matrice $n \times n$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2$, en déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 8** Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 2\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{2} & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = \alpha A + \beta I$. Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 9** Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice dans $\mathcal{B}$ de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. On considére $\overrightarrow{f_1} = (1, -2, 0)$, $\overrightarrow{f_2} = (-3, 5, 1)$, $\overrightarrow{f_3} = (0, 0, 1)$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{C} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer $f(\overrightarrow{f_1}), f(\overrightarrow{f_2}), f(\overrightarrow{f_3})$, et en déduire $D = M_{\mathcal{C}}(f)$.
   (c) Donner une relation matricielle entre $A$ et $D$.
3. En déduire, pour $n \geqslant 1$, la matrice $A^n$.

**Exercice 10** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{U} = (1, X+1, X^2 - X + 1)$ est une base de $E$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Définissons l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & E & \to & \mathbb{R}^3 \\ & P & \mapsto & f(P) = (P(0) + \alpha P'(0), P'(0) + \alpha P''(0), P''(0) + \alpha P(0)) . \end{array}$$

   Démontrer que $f$ est un endomorphisme de $E$ et déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $f$ est un isomorphisme de $E$ sur $\mathbb{R}^3$.
3. On suppose maintenant que $\alpha = -1$.
   (a) Déterminer $\ker(f)$. Donner $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f))$.
   (b) En déduire $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(f))$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ (on pourra se contenter, en justifiant pourquoi, d'en donner une base...).
   (d) Montrer que si $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
4. (a) Rappeler la base canonique $\mathcal{B}$ de $E$.
   (b) Donner la matrice représentative $A$ de $\mathcal{U}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $E$.
   (c) Démontrer que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.
   (d) En déduire l'expression des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{U}$.
5. Donner la matrice représentative de $f$ de $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
6. Posons $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{w} = (0, 1, 0)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{V} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) À l'aide d'un changement de base, donner $B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{U}, \mathcal{V})$.

**Exercice 11** Déterminer suivant les valeurs de $m$, le rang des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{pmatrix}$ ; $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 12** Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13** Discuter et résoudre les systémes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x-y+z &=& a\\ x+y-z &=& b\\ -x+2y+z &=& c \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} 3x-5y+2z+4t &=& a\\ 7x-4y+z+3t &=& b\\ 5x+7y-4z-6t &=& c \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+z &=& a\\ -x+3y-5z &=& b\\ 8x-9y+13z &=& c \end{array}\right.$$

**Exercice 14** Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, $p$ matrices de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ formant une famille libre, $(Y_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$, $q$ matrices de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ formant aussi une famille libre ; montrer que la famille des $({}^tY_jX_i)$ est une famille libre.

**Exercice 15** Soient $E=\mathbb{R}_3[X]$ et $\phi$ l'application qui à $P\in E$ associe le reste de la division euclidienne de $(X^4-1)P$ par $(X^4-X)$.

1. Montrer que $\phi\in\mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer la matrice de $\phi$ dans la base canonique de $E$.
3. Déterminer l'image et le noyau de $\phi$.
4. Déterminer les valeurs propres de $\phi$ (*i.e.* trouver les $\lambda\in\mathbb{R}$ tel qu'il existe $P\in E\setminus\{0_E\}$ tel que $\phi(P)=\lambda P$) et déterminer les vecteurs propres associée (*i.e* les vecteurs $P$ en question).

**Exercice 16** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $u_1=e_2+e_3$, $u_2=e_1+e_3$, $u_3=e_1+e_2$. Montrer que $\mathcal{C}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $E$ et donner la matrice $A'$ de $f$ dans cette nouvelle base.
2. Calculer pour $n\in\mathbb{N}$ $A'^n$ puis $A^n$.
3. Étudier les suites $(x_n)$, $(y_n$ et $(z_n)$ données par les relations de récurrence :
$$\forall n\geqslant 0,\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n\\ y_{n+1} &= x_n+3y_n-z_n\\ z_{n+1} &= x_n+y_n+z_n \end{cases}$$

**Exercice 17** Déterminer les matrices $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec :

(i) toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ;

(ii) toutes les matrices diagonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ;

(iii) toutes les matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 18** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de $E$, vérifiant $u^{n-1}\neq 0$ et $u^n=0$. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle $u$ a pour matrice $A=(a_{i,j})$ définie par $a_{j+1,j}=1$ et $a_{i,j}=0$ pour $i\neq j+1$.

**Exercice 19 (Théorème d'Hadamard)** Soit $A=(a_{i,j})\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
$\forall i\in[\![1,\dots,n]\!], |a_{i,i}|>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$. Montrer que $A$ est inversible.

**Exercice 20** Soit $n\geq 2$. Montrer que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.

# 20 Algèbre linéaire (3) : groupe symétrique et déterminants

**Exercice 1** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note la transposition $\tau_k = (1,k)$.
Montrer que $S_n$ est engendré par les transpositions $\tau_i$, c'est-à-dire que toute permutation $\sigma$ de $S_n$ s'écrit comme composée de ces transpositions. On notera ce résultat $S_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ puis que $S_n = \langle (1,2), (2,3), \dots, (n-1,n) \rangle$.

**Exercice 2** Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. On note $\sigma = (1,2,\dots,n)$ et $\tau = (1,2)$. Montrer que $S_n = \langle \sigma, \tau \rangle$.

**Exercice 3** Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. Déterminer le centre $Z(S_n) = \{\sigma_o \in S_n \mid \forall \sigma \in S_n, \sigma_o \circ \sigma = \sigma \circ \sigma_o\}$ de $(S_n, \circ)$.

**Exercice 4** Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints.
Déterminer l'ordre de $\sigma$, c'est à dire le plus petit naturel $p > 0$ tel que $\sigma^p = \text{ Id }$.

**Exercice 5** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $M_n(\mathbb{Z}) = \{(a_{i,j})_{i,j} / a_{i,j} \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $(M_n(\mathbb{R}), +, \times)$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que : $\det(A) \in \mathbb{Z}^* = \{-1, +1\} \iff (A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}))$.

**Exercice 6** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $GL_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$, alors $n$ est pair.

**Exercice 7** Soit $a, b, c \in K$. Notons $\Delta$ le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

1. Vérifier en le calculant que $\Delta = (a+b+c)^3$.
2. Redémontrer cette formule à l'aide d'opérations élémentaires et de mises en facteurs.

**Exercice 8** Calculer, en fonction de $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 9** Soit $u$, $v$ et $w$ des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;b]$ qui vérifient $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in ]a;b[$ tel que $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0$.

**Exercice 10** Démontrer sans grands calculs que le nombre $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ est un entier relatif, multiple de 13.

**Exercice 11** Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver tous les nombres réels $x$ tels que $\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a} \end{vmatrix} = 0$.

**Exercice 12** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

En déduire que le rang de la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1^n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ x_n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} \right\}$ de vecteurs de $\mathbb{K}^{n+1}$ est le cardinal de $\{x_0, \dots, x_n\}$.

**Exercice 13** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On note $\omega = exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$ et on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

En utilisant $A \times M$, déterminer $\det(A)$.

**Exercice 14** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} \cos(a_0) & \cos(a_0+b) & \dots & \cos(a_0+nb) \\ \cos(a_1) & \cos(a_1+b) & \dots & \cos(a_1+nb) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(a_n) & \cos(a_n+b) & \dots & \cos(a_n+nb) \end{vmatrix}$.

**Exercice 15** Soient $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ et $P(X) \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$. Montrer que $\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix} = 0$.

*Indication : on pourra considérer l'application $\Delta\ : P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X)$.*

**Exercice 16** Calculer les déterminants suivants ($n \in \mathbb{N}^*$, $a, b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ ) :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & \ddots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ & \dots & & \dots & \dots & \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}; \quad \Gamma_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

**Exercice 17** Soient $p, q \in \mathbb{N}^*, A \in M_p(\mathbb{K}), B \in M_{p,q}(\mathbb{K}), C \in M_q(\mathbb{K})$. Montrer que $\begin{vmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{vmatrix} = \det(\mathrm{A})$ .

Calculer $\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$. En déduire $\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & C \end{vmatrix}$.

**Exercice 18** Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leqslant q \leqslant p+1$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \dots & \binom{p}{q-1} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \dots & \binom{p+1}{q-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p+q-1}{1} & \binom{p+q-1}{2} & \dots & \binom{p+q-1}{q-1} \end{vmatrix}.$$

**Exercice 19** Soient $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\det(Com(A)) = \det(A)^{n-1}$.

*Indication : étudier les cas $A = 0_n, A \in GL_n(\mathbb{K}), 1 \leqslant rg(A) \leqslant n-1$.*

# 21 Intégration sur un segment

**Exercice 1** Calculer les intègrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\ \mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\ \mathrm{d}x$
3. $\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q\ \mathrm{d}x$
4. $\int_0^1 \sqrt{t}(2-t)\ \mathrm{d}t$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ \mathrm{d}t$
6. $\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} dt$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\ \mathrm{d}t$
8. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{1+t^2}}$
9. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}t - \mathrm{ch}2}$
10. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)-\cos(x)}\ \mathrm{d}x$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x\cos\theta}$, $\theta \in ]-\pi,\pi[$

**Exercice 2** Déterminer les primitives suivantes (penser à déterminer les intervalles sur lesquelles ces primitives existent) :

1. $\int x\sqrt{1+x}\ \mathrm{d}x$
2. $\int (x-1)\sqrt{x}\ \mathrm{d}x$
3. $\int\ \mathrm{e}^{2x}\sin 3x\ \mathrm{d}x$
4. $\int \cos 3x \sin 2x\ \mathrm{d}x$
5. $\int \sqrt{1-\cos x}\ \mathrm{d}x$
6. $\int \ln^2 x\ \mathrm{d}x$
7. $\int \frac{x}{\cos^2\ x}\ \mathrm{d}x$
8. $\int \sin^6(x)\ \cos^5(x)\ \mathrm{d}x$
9. $\int \sin^2(x)\ \cos^2(x)\ \mathrm{d}x$
10. $\int \frac{\cos(t)+2\sin(t)}{\sin(t)-\cos(t)}\ \mathrm{d}t$.
11. $\int \tan^n(t)\ \mathrm{d}t,\ n\in\mathbb{N}$
12. $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^4 t + cos^4 t}$
13. $\int \frac{\cos(t)\ \mathrm{d}t}{cos(2t)}$
14. $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t - cost}$
15. $\int \frac{\tan t\ \mathrm{d}t}{1+\sin^2 t}$
16. $\int \frac{t\ \mathrm{d}t}{1+t^4}$
17. $\int \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$
18. $\int \frac{\sqrt{t-1}}{3+t}\ \mathrm{d}t$
19. $\int t^3 e^{2t}\ \mathrm{d}t$
20. $\int t^2 \ln t\ \mathrm{d}t$
21. $\int \exp(\arcsin t)\ \mathrm{d}t$
22. $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$
23. $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-3t+2}$
24. $\int \cos^5 x \sin^3 x\ \mathrm{d}x$
25. $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+2t+2}}$
26. $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t-t^2}}$
27. $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t-2}}$
28. $\int \frac{(t+2)\ \mathrm{d}t}{\sqrt{3+2t-t^2}}$
29. $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-9)^{\frac{3}{2}}}$
30. $\int \frac{\sqrt{t^2-25}}{t^2}\ \mathrm{d}t$
31. $\int \frac{\sqrt{t^2+25}}{t}\ \mathrm{d}t$
32. $\int \frac{6!\ \mathrm{d}t}{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)(t-6)}$

**Exercice 3** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie et continue sur $[0,1]$.
Définissons la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\ \mathrm{d}t$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Exercice 4** Soit $a$ un réel $> 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $[0,a]$ et continue par morceaux sur $[0,a]$. Définissons la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_n = \displaystyle\int_0^a \frac{f(t)}{1+nt}\ \mathrm{d}t$. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

**Exercice 5** Calculer $\int_{-1}^2 x\mid x\mid\ \mathrm{d}x$ ainsi que $\int_{-1}^1 x\mid x\mid\ \mathrm{d}x$

**Exercice 6**

1. (a) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$ à l'aide d'un changement de variable.

   (b) En utilisant une somme de Riemann, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$.

2. Étudier la limite de la suite $u_n = n\ \left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + ... + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.

**Exercice 7** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (contenant au moins deux points) tel que $0\in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur $I$. Justifier l'existence, pour tout $x\in I$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(xt)\ \mathrm{d}t$ et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\int_0^1 f(xt)\ \mathrm{d}t\right)$.

*Indications : faire un dessin représentant $I$, 0, $x$ et des $xt$ pour $t\in[0,1]$. Pour la limite, commencer par le cas où $f(0)=0$ (utiliser alors la continuité de $f$ en 0) et traiter le cas général à l'aide de la fonction $t\mapsto g(t) = f(t) - f(0)$.*

**Exercice 8** Refaire l'exercice 7 en utilisant une primitive $F$ de $f$ sur $I$.

**Exercice 9** Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $\Psi$ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\Psi\left(\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{(b-a)}\int_a^b \Psi\left(f(t)\right)\ \mathrm{d}t.$$

**Exercice 10 (Une fraction rationnelle)**

1. Calculer, pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^3+1}\ \mathrm{d}t$.
2. Soit $a$ un réel et $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie et continue sur $I=[a,+\infty[$.
   On dit que la fonction $f$ est *intégrable* sur $[a,+\infty[$ si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite dans $\mathbb{K}$ quand $x$ tend vers $+\infty$. Si la fonction $f$ est intégrable sur $[a,+\infty[$, son intégrale sur $[a,+\infty[$ est $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
   Prouver que $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ et calculer $I=\int_a^{+\infty}\frac{1}{1+t^3}\ \mathrm{d}t$.

**Exercice 11 (Intégrales de Wallis)** On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n t\ \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n x\ \mathrm{d}x$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $I_n > 0$, et que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.
4. Calculer $I_0$ et $I_1$, et en déduire que pour tout entier naturel n :
$$I_{2n} = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_{2n}I_{2n+1})$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}I_{2n})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}I_{2n+1})$.
   En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**Exercice 12** Soit $x$ un réel, $x\in[0;1]$. Définissons la suite $\left(f_n(x)_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ au moyen de la relation suivante :

$$f_0(x)=1 \quad \text{et pour } n\geqslant 1, \quad f_n(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_{n-1}(t)}\ \mathrm{d}t.$$

1. Calculer $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
2. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ est de la forme $a_n x^{b_n}$.
   Calculer $b_n$ et pour $n\geqslant 1$, exprimer $a_n$ en fonction de $a_{n-1}$.
3. Prouver que : $2^n\ln(a_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^n\left(-2^k\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\right)$.
4. En déduire l'équivalent asymptotique : $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2^n}$.
5. Démontrer que la suite $\left(f_n(x)_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $f(x)$ que l'on précisera. On dit alors que *la suite de fonctions* $(f_{n}{}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers la fonction* $f$ *sur* $[0;1]$.
6. Notons $M_n = \sup\limits_{x\in[0,1]}(|f(x)-f_n(x)|)$. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty}M_n = 0$ ?

**Exercice 13 (Inégalité de Poincaré)** Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ et $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ tels que $f(a)=0$. Montrer que :

$$\int_a^b f^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f')^2.$$

Déterminer les cas d'égalité.

**Exercice 14 (Lemme de Gronwall)** Soient $c \in \mathbb{R}^+$, $u, v \in C^o(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)v(t) \ \mathrm{d}t.$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ : $u(x) \leqslant c \times \exp\left(\int_0^x v(t) \ \mathrm{d}t\right)$.

**Exercice 15 (Intégration numérique : méthode des rectangles à gauche)** Soit $a < b$ des réels et $f$ un application définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'idée est de découper $[a, b]$ grâce à une subdivision de pas constant $\dfrac{b-a}{n}$ *( c'est-à-dire $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, pour $i = 0, \ldots, n-1$)*, puis d'approcher l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t$ par la somme des aires des rectangles de côtés de longueurs $x_{i+1} - x_i$ et $f(x_i)$. Posons donc $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$.

1. Faire un dessin représentant $\displaystyle\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t$ et $R_n(f)$.
2. Justifier (sans calcul, à l'aide du cours !) la convergence de la suite $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\displaystyle\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t$.
3. Justifier l'existence de $M_1 = \sup\limits_{t\in[a,b]} (|f'(t)|)$.
4. Soit $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha < \beta$.
   (a) Soit $F$ une primitive de $f$ sur $[a, b]$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe $\gamma \in ]\alpha, \beta[$ tel que $F(\beta) = F(\alpha) + (\beta - \alpha)F'(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}F''(\gamma)$.
   (b) En déduire que $\left|\int_\alpha^\beta f(t) \ \mathrm{d}t - (\beta - \alpha)f(\alpha)\right| \leqslant \frac{M_1}{2}(\beta - \alpha)^2$.
5. En utilisant 4, montrer que l'incertitude de la méthode est majorée par : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t - R_n(f)\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^2 M_1}{2n}$.
6. Comparer la précision à celle de la méthode des trapèzes vue en cours.
7. Application : déterminer le rang $n$ nécessaire à un calcul approché de $\int_0^1 t^2 \ \mathrm{d}t$ à $10^{-2}$ près.

**Exercice 16 (Intégration numérique : méthode des rectangles médians)** On reprend les notations de l'exercice 15 et supposant maintenant $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'idée est ici toujours de découper $[a, b]$ grâce à une subdivision de pas constant $\dfrac{b-a}{n}$ *( c'est-à-dire $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, pour $i = 0, \ldots, n-1$)*, mais d'approcher cette fois l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t$ par la somme des aires des rectangles de côtés de longueur $x_{i+1} - x_i$ et $f(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2})$. Posons donc $U_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$.

1. Faire un dessin représentant $\displaystyle\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t$ et $U_n(f)$. Puis justifier l'existence de $M_2 = \sup\limits_{t\in[a,b]} (|f''(t)|)$.
2. Soit $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha < \beta$.
   (a) Soit $F$ une primitive de $f$ sur $[a, b]$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe $\gamma_1 \in ]\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}[$ tel que

$$F(\alpha) = F(\frac{\alpha+\beta}{2}) + \frac{(\alpha-\beta)}{2}F'(\frac{\alpha+\beta}{2}) + \frac{\left(\frac{(\alpha-\beta)}{2}\right)^2}{2}F''(\frac{\alpha+\beta}{2}) + \frac{\left(\frac{(\alpha-\beta)}{2}\right)^3}{6}F'''(\gamma_1).$$

   De même, montrer qu'il existe $\gamma_2 \in ]\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta[$ tel que

$$F(\beta) = F(\frac{\alpha+\beta}{2}) + \frac{(\beta-\alpha)}{2}F'(\frac{\alpha+\beta}{2}) + \frac{\left(\frac{(\beta-\alpha)}{2}\right)^2}{2}F''(\frac{\alpha+\beta}{2}) + \frac{\left(\frac{(\beta-\alpha)}{2}\right)^3}{6}F'''(\gamma_2).$$

   (b) En déduire que $\left|\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t - (\beta-\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})\right| \leqslant \frac{M_2}{24}(\beta-\alpha)^3$.

3. En utilisant 2, montrer que l'incertitude de la méthode est majorée par : $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - U_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^2}$.
4. Comparer la précision de cette méthode à celles vues dans l'exercice 15 et en cours.
5. Application : déterminer le rang $n$ nécessaire à un calcul approché de $\int_0^1 t^2\ \mathrm{d}t$ à $10^{-2}$ près.

**Exercice 17** Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. Supposons dans cette question que $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
   Déterminer un équivalent de $u_n$.
3. À nouveau, nous ne supposons que $f$ continue.
   (a) Traiter le cas $f$ constante.
   (b) Dans le cas où $f(1) = 0$, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.
   (c) Conclure dans le cas général.

**Exercice 18** Soit $f \in \mathcal{C}^1([a;b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0 = f(b)$.

1. Justifier l'existence de $M = \sup\limits_{t\in[a;b]}(|f'(t)|) = \| f' \|_\infty$.
2. En majorant $f$ par une fonction affine par morceaux, montrer que $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}$.
3. Discuter le cas d'égalité dans la question 2.

**Exercice 19** Soient $f$ et $g$ des applications continues et positives sur $[a,b]$ $(a<b)$, $f$ croissante. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(c)\int_a^c g(x)\ \mathrm{d}x$.

**Exercice 20** Déterminer la limite quand $x \to 0^+$ de $\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t$.

**Exercice 21** Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \left[\prod_{i=0}^{n}(1+\frac{k}{n})\right]^{1/n}$.

**Exercice 22** Calculer $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$.

# 22 espaces euclidiens (1)

**Exercice 1** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $E$. Montrer que :
$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

**Exercice 2** Montrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $(x_1 + \ldots + x_n)^2 \leqslant n({x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2)$. Cas d'égalité ?

**Exercice 3** On considére les quatre applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_1 : x \mapsto \cos(x); \quad f_2 : x \mapsto \sin(x);$$

On définit $E$ comme étant l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$, et on considére l'application de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ :

$$(f, g) \mapsto (f \mid g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

1. Montrer que cette application est un produit scalaire euclidien sur $E$ et montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $E$.

2. Soit $F = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$. Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ définit un produit scalaire sur $F$.
3. $f$ et $g$ étant deux éléments de $F$, on désigne par $f \star g$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto (f \star g)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

   Montrer que $f \star g$ appartient à $F$ et donner ses composantes dans la base $(f_1, f_2)$ de $F$.

**Exercice 4** Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs unitaires telle que pour tout $x \in E$, $\| x \|^2 = \sum_{j=1}^{p} (u_j|x)^2$. Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de $E$.

**Exercice 5** Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$.

1. Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ des vecteurs unitaire de $E$. Vérifier l'équivalence entre les énoncés :
   (i) $\| \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \| = 1$ ;
   (ii) $(\overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{b}) = \frac{1}{2}$.
2. On se donne $\overrightarrow{u_1} \in E$, unitaire. Montrer qu'il existe $\overrightarrow{u_2} \in E$, unitaire tel que $\| \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} \| = 1$.
3. Montrer qu'il existe dans $E$ $n$ vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ tels que pour tout $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\| \overrightarrow{u_i} - \overrightarrow{u_j} \| = 1$.
4. La famille $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ ainsi obtenue est-elle une base de $E$ ?

**Exercice 6** Montrer que : $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \frac{1}{n} \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2}$.

**Exercice 7** L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire canonique et d'une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$. Soit $F$ et $G$ les sous-espaces définis par les équations :

$$F : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad G : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

1. Déterminer une base de $F^{\perp}$.
2. Déterminer la matrice représentative de la projection orthogonale sur $G$.

**Exercice 8** On note, pour un entier naturel $n$, $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus $n$. On considére $n+1$ réels deux à deux distincts $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ et on définit l'application $\varphi$ de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire et expliciter une base orthonormée pour ce produit scalaire.

**Exercice 9** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ espace vectoriel euclidien. Établir l'équivalence entre les énoncés :

(i) $\mathcal{B}$ est orthonormale.

(ii) $\forall x \in E \ x = \sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i$.

(iii) $\forall x \in E \ ||x||^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|x)^2$.

(iv) $\forall (x,y) \in E \times E \ (x,y) = \sum_{i=1}^n (e_i|x)(e_i|y)$.

**Exercice 10** *Déterminant de Gram*

Soient $x_1, x_2, \dots, x_p$, $p$ vecteurs d'un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n$. On considère la matrice $G$ définie par :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leq i,j \leq p}.$$

Montrer que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est liée si et seulement si $\det G = 0$.

**Exercice 11** Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $f$ une application de $E$ dans $E$ (non supposée linéaire a priori) telle que :

$$\forall (x,y) \in E \times E \ (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Montrer que $f$ est linéaire.

**Exercice 12** Soient $E$ un espace euclidien et $p$ un endomorphisme de $E$.
Montrer que $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$p \circ p = p \quad \text{et} \quad ||p(x)|| \leqslant ||x||.$$

**Exercice 13** Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E, \ (f(x)|x) = 0$.

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2, \ (f(x)|y) + (f(y)|x) = 0$.
2. Montrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $E$ et que le rang de $f$ est pair.

**Exercice 14** Soit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On définit pour $(M,N) \in E^2$, $\phi(M,N) = \operatorname{Tr}(M^t N)$.

1. Montrer que $\phi$ définit un produit scalaire sur $E$.
2. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j}) \in E$, $\operatorname{Tr}(A)^2 \leqslant n \sum_{(i,j)} a_{i,j}^2$. A quelle condition a-t-on égalité ?
3. Soit $A = (a_{i,j}) \in E$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques. Déterminer $\inf\limits_{M \in \mathcal{S}_n} \sum\limits_{i,j} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$.

**Exercice 15** Calculer $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 \, dx$ avec $f : x \mapsto x \ln(x)$ puis $f : x \mapsto \sin(\pi x)$.

**Exercice 16** Retrouver les formules, pour tous $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d} \in \mathbb{R}^3$ :

1. $[\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}] = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]^2$ ;
2. $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}) = 0$ ;
3. $[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{d}] = (\overrightarrow{a} | \overrightarrow{d})[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$ ;
4. $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b} \wedge (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c} \wedge (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b})$

**Exercice 17** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension quelconque, muni d'un produit scalaire et $F$ un s.e.v. de $E$ de dimension finie.

1. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp = F$.
2. Soit $(u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de $E$. Montrer que pour tout $x \in E$, $\| x \|^2 \geqslant \sum\limits_{k=1}^n (x \mid u_i)^2$.

   Étudier le cas d'égalité.
3. Application : soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $2\pi$-périodique.
   On pose $c_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) \, dt$, $s_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) \, dt$ et $c_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \dfrac{\sqrt{2}}{2} \, dt$.
   Montrer que $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t) \, dt \geqslant {c_0}^2 + \sum\limits_{k=1}^n ({c_k}^2 + {s_k}^2)$.

# 23 espaces euclidiens (2) : automorphismes orthogonaux

**Exercice 1** On munit le plan $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée canonique. Calculer la matrice représentative dans la base canonique de la réflexion par rapport au vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2** Soit $E_3$ un espace vectoriel euclidien (orienté) de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On emploie les notations du cours pour le produit scalaire, le produit vectoriel, la norme. Le produit mixte sera noté $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$ pour $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in E_3$.

1. Soient $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in E_3$ tels que $\| \overrightarrow{b} \| = \| \overrightarrow{c} \|$. Démontrer que :

$$((((\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \wedge (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})) \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}))|(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})) = 0.$$

2. Résoudre l' équation suivante (d'inconnue $\overrightarrow{x} \in E_3$) :

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}, \qquad (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in {E_3}^2.$$

**Exercice 3** On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique.
Déterminer la matrice représentative dans la base canonique de

1. la réflexion par rapport au plan d'équation cartésienne $\pi$ : x + y - 2z = 0.
2. la rotation d'axe $\mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ .

**Exercice 4** Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considére l'endomorphisme $f$ de $E$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^2$. Qu'en déduit-on pour $f$ ?

**Exercice 5** Soit $u$ l'endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour que $u$ soit une rotation, il faut et il suffit que $(a, b, c)$ soient les racines d'une équation du troisiéme degré du type $u^3 - u^2 + p = 0$ avec $p \in [0, \frac{4}{27}]$).

**Exercice 6** Soit $f$ l'endomorphisme de l'espace $E = \mathbb{R}^3$ euclidien dont la matrice dans la base canonique de $E$ s'écrit

$$A = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \\ -10 & 5 & 0 \\ -6 & +8 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $\ker(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f) = E$.
2. Ecrire la matrice de $f$ dans une base orthonormée directe de $E$ formée d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire la nature géométrique de $f$.

**Exercice 7** Soit $E$ un espace euclidien de dimension 3, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a$ un vecteur unitaire de $E$. Définissons l'application $u_\lambda$ de $E$ dans $E$ par $u_\lambda(x) = (x \mid a)\, a + \lambda(x \wedge a)$.
Pour quelles valeurs de $\lambda$ $u_\lambda$ est-il un automorphisme orthogonal ?

**Exercice 8** Soit $E$ l'espace euclidien de dimension 3 muni de la base orthonormale directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. On considére un vecteur $\overrightarrow{e} = a.\overrightarrow{e_1} + b.\overrightarrow{e_2} + c.\overrightarrow{e_3}$, non nul, et l'application $\Phi_{\overrightarrow{e}}$ de $E$ dans $E$ définie sur tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $E$ par :

$$\Phi_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u}.$$

1. Montrer que $\Phi_{\overrightarrow{e}}$ est un endomorphisme de $E$ et donner sa matrice $M_{\overrightarrow{e}}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Calculer $P(x) = \det(M_{\overrightarrow{e}} - x.I_3)$, où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Vérifier que 1 est la seule racine réelle de $P$.
   (c) Justifier (sans calcul) pourquoi $\ker(\Phi_{\overrightarrow{e}} - \mathrm{Id}_E) \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$ puis déterminer $\ker(\Phi_{\overrightarrow{e}} - \mathrm{Id}_E)$.
   (d) Justifier (sans calcul) pourquoi pour tout réel $\lambda \neq 1$, $\ker(\Phi_{\overrightarrow{e}} - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
3. On pose $\overrightarrow{u_1} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{e}\|}.\overrightarrow{e}$ et on considére une base orthonormale directe $\mathcal{U} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.
   *Remarque : on ne demande pas d'expliciter les vecteurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ !.*
   (a) Donner la matrice $A$ de $\Phi_{\overrightarrow{e}}$ relativement à $\mathcal{U}$ et calculer son déterminant.
   (b) En déduire le déterminant de $M_{\overrightarrow{e}}$ en fonction de $\|\overrightarrow{e}\|$.
   Vérifier et expliquer pourquoi ce résultat a déjà été calculé.
   (c) On suppose maintenant que $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e_1}$. Résoudre l'équation : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$, où $\overrightarrow{f} = \alpha.\overrightarrow{e_1} + \beta.\overrightarrow{e_2} + \gamma.\overrightarrow{e_3}$ est donné et $\overrightarrow{u}$ le vecteur inconnu $\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{e_1} + y.\overrightarrow{e_2} + z.\overrightarrow{e_3}$

**Exercice 9** Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

**Exercice 10** Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

**Exercice 11** Soit $E$ un espace euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :
(i) $f$ préserve l'orthogonalité : $\forall (x,y) \in E^2,\ (f(x)|f(y)) = 0 \Leftrightarrow (x|y) = 0$.
(ii) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g \in O(E)$ tels que $f = \alpha g$.

**Exercice 12** Soient F , G deux s.e.v. d'un espace euclidien $(E, (,))$ tels que $E = F \oplus G$. On note $s$ la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.
Montrer que : $s \in O_{\mathbb{R}}(E) \iff G = F^\perp$ .

**Exercice 13** Soient $n \in N^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ tels que ${}^tA = -A$.
1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ Vérifier que ${}^tXAX = 0$. Montrer que $I_n - A \in GL_n(\mathbb{R})$.
2. On peut alors considérer la matrice $P = (I_n + A) \times (I_n - A)^{-1}$. Montrer que $P \in O_n(\mathbb{R})$ et que $I_n + P \in GL_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 14** Donner une C.N.S. sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R})$.

# 24 fonctions de deux variables réelles.

**Exercice 1** Étudier les limites éventuelles en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = (x+y)\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2})$ ;
2. $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$ ;
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin x$ ;
4. $f(x,y) = x^y$.
5. $f(x,y) = (x-2y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ ;
6. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ;
7. $f(x,y) = \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**Exercice 2** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ et $f$ une fonction définie sur $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Définissons, sur $[0,\eta]^2 - \{(0,0)\}$, la fonction de deux variables : $\varphi : (h,k) \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}$.
Démontrer que $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si $\varphi$ admet une limite $\alpha$ en $(0,0)$. Exprimer alors $f'(x_0)$ en fonction de $\alpha$.

**Exercice 3** Soit $f$ la fonction définie par : $\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$.

Étudier la continuité de $f$. La fonction $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ ?

**Exercice 4** Soit $f$ la fonction définie par : $\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$.

Montrer que $f$ admet une dérivée en $(0,0)$ selon toutes les directions, mais n'est pas continue en $(0,0)$.

**Exercice 5** Étudier les extréma locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3+y^3$ sur $\mathbb{R}^2$ ;
2. $f(x,y) = x^2+y^2+\sin(x^2+y^2)$ sur $[-1,1]^2$ ;
3. $f(x,y) = x^2+3y^2-2x-10y+2xy+6$ sur $\mathbb{R}^2$ ;
4. $f(x,y) = e^{x\cos y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 6** Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0. \end{cases}$.

1. Démontrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les extrema éventuels de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. En déduire que $f$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 7** Déterminer les extréma sur $\mathbb{R}^2$ de $f$ définie par $f(x,y) = \ln(1+y^2)+x^2y$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**Exercice 8** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle qu'il existe $k \in [0;1[$ tel que pour tout réel $t$, $|f'(t)| \leqslant k$.
On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (x+f(y), y+f(x))$.

1. Montrer que $f$ est $k$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, puis prouver que $g$ est une injection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = (x+f(y)-a)^2 + (y+f(x)-b)^2$.
   On pose $A = \{F(x,y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $A$ admet une borne inférieure et pas de borne supérieure.
   (b) On admet que cette borne inférieure est un plus petit élément. En déduire que $F$ possède au moins un extremum sur $\mathbb{R}^2$. Cet extremum est-il un maximum ou un minimum ? Est-il unique ?
3. Utiliser ce résultat pour démontrer que $(a,b)$ appartient à l'image de $g$ .
4. Conclure : $g$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 9** Un fabriquant de boîtes de conserve a une commande : il doit produire des boîtes cylindriques de volume $V$ donné. Quelles doivent être les caractéristiques de la boîte (diamètre et hauteur) pour que le fabriquant utilise le moins de métal possible ?
***(c'est à dire telles que la surface de la boite soit la plus petite possible)***

**Exercice 10** Définissons, pour $z \in \mathbb{C}$, $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, et l'application $f$ par $f(x, y) = |\sin(x + iy)|^2$.

1. Montrer que $f$ admet un maximum et un minimum sur $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Quel est ce minimum ?
2. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \dfrac{\mathrm{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}$.
3. Trouver les points critiques de $f$ sur $D' = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
4. Montrer qu'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que le maximum de $f$ sur $D$ soit $f(\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$.
5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{sh}(t) \geqslant t$ et $\sin(t) \leqslant t$.
6. Montrer que $g(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$ est croissante sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.
7. Donner le maximum de $f$ sur $D$.

**Exercice 11** On note $e = \exp(1)$ et $\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[$. On définit, pour tout nombre réel $a$ non nul, l'application

$$\begin{array}{rccl} f_a & : & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & f_a(x, y) = \dfrac{xe^{-x}}{y} - \dfrac{y}{a}. \end{array}$$

On prend $a = -e$ et on note $g = f_{-e}$ : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $g(x, y) = \dfrac{xe^{-x}}{y} + \dfrac{y}{e}$.

1. Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $g$ en tout point $(x, y)$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Si $\overrightarrow{h} = (h_1, h_2)$, en déduire la dérivées partielles *dans la direction* $\overrightarrow{h}$ de $g$ en tout point $(x, y)$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ (justifier !).
3. Déterminer les extrema de $g$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
4. On prend maintenant $a = 1$. Justifier l'existence et étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel $n$ comme la solution de l'équation $f_1(x, x^n) = 0$.

**Exercice 12** Soit $f$ une fonction numérique $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $g$ la fonction de deux variables réelles définies pour $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $g(x, y) = f(\dfrac{y}{x})$.

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y)$ en fonction de $f$, de ses dérivées, de $x$ et de $y$.
2. Déterminer la fonction $f$ lorsque $g$ vérifie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{y}{x^3}.$$

**Exercice 13** Déterminer les fonctions numériques à variable réelle $f$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que la fonction numérique de deux variables réelles définie par $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ vérifie $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**Exercice 14** Considérons l'équations aux dérivées partielles suivantes*(régissant la propagation d'une onde libre de célérité $c = 2$ dans un milieu unidirectionnel)* : $(E)$ $4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$, où $f$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Nous envisageons d'effectuer un changement de variables linéaire : $u = x + \alpha t$ et $v = x + \beta t$.
   Posons « $f(t, x) = F(u, v)$ » *(c'est à dire $f(t, x) = F(x + \alpha t, x + \beta t)$ et $F(u, v) = f(\dfrac{u - v}{\alpha - \beta}, \dfrac{\beta u - \alpha v}{\beta - \alpha})$).*
   (a) En expliquant les calculs, donner $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction des dérivées partielles de $F$.
   (b) Démontrer que l'on peut choisir $\alpha$ et $\beta$ pour que l'équation $(E)$ devienne : $(E_1)$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$.
   (c) Résoudre $(E_1)$.
   (d) Donner la solution générale *(c'est-à-dire la forme générale des solutions)* de $(E)$.
2. Montrer que l'unique solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifie pour tout réel $x$ les conditions initiales

$$f(0, x) = \sin(\pi x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = 2\pi \sin(\pi x)$$

   est donnée par $f(t, x) = \sin(\pi x)\left(\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)\right)$.

3. Trouver les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ les conditions initiales :

$$f(0,x) = \sin^2(\frac{x}{2}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(0,x) = \cos(\frac{x}{3}).$$

**Exercice 15** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
On dit que $f$ est *homogène de degré* $\alpha \in \mathbb{R}$ si $\forall t > 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$.
Montrer l'équivalence entre les énoncés :

(i) $f$ est homogène de degré $\alpha$ ;

(ii) $f$ est solution de l'E.D.P. $(E)$ : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.

Résoudre $(E)$ et déterminer les fonctions homogènes de degré $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Exercice 16** À l'aide du changement de variables $u = xy$ et $v = x/y$, résoudre l'E.D.P.

$$(E) \quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

# 25 Intégrales multiples

**Exercice 1** Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \iint_A e^{-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, avec $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } \dfrac{x}{3} \leqslant y \leqslant 1\right\}$. *Indication : utiliser Fubini.*
2. $J = \iint_B \dfrac{y}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, avec $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y,\ \text{et } x^2+y^2 \leqslant 1\}$.
3. $K = \iint_C \dfrac{1}{x+y+1}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, avec $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^2 \leqslant y \leqslant x\}$.
4. $L = \iint_D xy\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, avec $a > 0$, $b > 0$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y \text{ et } \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$.
   *Indication : on pourra faire le changement de variables* $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}$, *puis passer en coordonnées polaires.*

**Exercice 2**

1. Déterminer l'aire du domaine intérieur à la cardioïde d'équation $\rho = a(1+\cos\theta)$.
2. Déterminer l'aire du domaine intérieur à la cardioïde précédente et extérieur au cercle d'équation polaire $\rho = a$.

**Exercice 3** Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$. Calculer

$$I = \iint_D xy \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

*Indication : Fubini, puis intégration par parties.*

**Exercice 4** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ et $f, g$ des applications continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. En étudiant $\iint_{[a,b]^2} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2$ retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Étudier le cas d'égalité.

**Exercice 5**

1. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\ \mathrm{d}y$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$.

**Exercice 6** Dans le plan affine euclidien, on considère les lignes $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Quelle est la probabilité qu'en jetant une aiguille de longueur $l \leqslant 1$, celle-ci intersecte $A$.

**Exercice 7** Calculer l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ en utilisant l'intégrale double de la fonction $f : (x,y) \mapsto \exp(-(x^2+y^2))$ sur le disque de centre $(0,0)$ et de rayon R ($R > 0$).

**Exercice 8** Calculer le volume du domaine au dessus du plan $(Oxy)$ délimité par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et les plans d'équation $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$.

**Exercice 9** Calculer le volume du domaine compris entre le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et le plan $x + y + z = 2$.

**Exercice 10** Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre le paraboloïde $x^2+y^2 = 2pz$ ($p > 0$) et le cône $x^2+y^2 = \lambda^2 z^2$.

**Exercice 11** Soit $a, b, c$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer le volume de l'ellipsoïde définie par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

# 26 propriétés métriques des courbes

**Exercice 1** Dessiner puis calculer les longueurs des courbes suivantes :

1. Astroïde paramétrée ($a > 0$) : $x = a\cos^3 t$ et $y = a\sin^3 t$ ;
2. Courbe d'équation polaire : $\rho = \cos^3(\frac{\theta}{3})$ ;
3. Chaînette d'équation $y = \mathrm{ch}(x)$, avec $x \in [-5, 5]$.

**Exercice 2**

1. Construire la lemmniscate de Bernoulli $\Gamma$ d'équation polaire $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$.
2. Soient deux points $A$ et $B$ de $\Gamma$ de paramètres 0 et $\frac{\pi}{4}$. Soient $M$ et $N$ deux points de $\Gamma$ de paramètres respectifs $\alpha$ et $\beta$ appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et tels que $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   Montrer que l'arc $NB$ a une longueur finie et égale à celle de l'arc $AM$.

**Exercice 3** Soit $\Gamma$ la coube définie paramétriquement par : $x = \sqrt{\cos u}$ et $y = \sqrt{\sin u}$, pour $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Déterminer le rayon de courbure en tout point de $\Gamma$.

**Exercice 4** Soit $\mathcal{P}$ une parabole. Montrer que le cercle osculateur en un point $M$ de $\mathcal{P}$ autre que son sommet recoupe $\mathcal{P}$ en un point $Q$ que l'on exprimera en fonction du paramètre utilisé pour décrire $M$.

**Exercice 5 (Cissoïde de Dioclès)** Soit $\Gamma_2$ un cercle de rayon $r$, $[OA]$ un diamètre de $\Gamma_2$ et $\Gamma_1$ la tangente à $\Gamma_2$ en $A$. Remarquons que pour $M_1 \in \Gamma_1$, la droite $(OM_1)$ ne rencontre la courbe $\Gamma_2$ qu'en un seul point $M_2$.
La *cissoïde de Dioclès* est le lieu des points $M$ du plan tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$, pour $M_1$ parcourant $\Gamma_1$.

1. Démontrer que la cissoïde de Dioclès a pour équation polaire $\rho(\theta) = \dfrac{2r\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$, pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Démontrer que son rayon de courbure est : $R(\theta) = \dfrac{r\sin(\theta)(1+3\cos^2(\theta))^{3/2}}{3\cos^4(\theta)}$.

**Exercice 6** Vous roulez en voiture sur une route d'équation $y = \ln(x)$.

1. Déterminer l'endroit où il faut tourner le plus le volant.
2. Calculer la distance parcourue de l'origine à ce point.

**Exercice 7 (Étude d'une strophoïde droite)** Soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien, $a > 0$ un réel, $\mathcal{D}$ la droite affine de $\mathcal{E}_2$ d'équation $x = a$ et $(\Gamma)$ le cercle de centre $A(a, 0)$ et de rayon $a$. Une droite variable $\Delta_\theta$, passant par l'origine $O(0,0)$ et paramétrée par l'angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec l'horizontale coupe $\mathcal{D}$ en $M_{\mathcal{D}}(\theta)$ et $(\Gamma)$ en $M_\Gamma(\theta)$. On définit $M(\theta) \in \mathcal{E}_2$ par $\overrightarrow{OM(\theta)} = \overrightarrow{M_\Gamma(\theta)M_{\mathcal{D}}(\theta)}$.
Notons $(C)$ le lieu des points $M(\theta)$ : $(C)$ est une *strophoïde droite*.

1. (a) Faire un dessin de la construction de $(C)$.
   (b) Montrer que l'équation polaire de $(C)$ est $\rho(\theta) = -\frac{a\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (c) Tracer $(C)$ sur un même dessin que $\Gamma$ et $\mathcal{D}$ *on ne demande pas un dessin très précis, mais simplement illustrant convenablement l'allure de la courbe).*
   (d) Déterminer le rayon de courbure de $(C)$ au point $M(0)$ et placer sur le dessin précédent le cercle osculateur de $(C)$ en $M(0)$.
   (e) Déterminer les réels $\theta$ de $(C)$ tel que $M(\theta) = O(0,0)$. En déduire que $O$ est un point double de $(C)$. Nous les noterons $\theta_1, \theta_2$. Déterminer les cercles osculateurs de $(C)$ en $M(\theta_1)$ et $M(\theta_2)$.
2. Démontrer que $(C)$ est déterminée par l'équation cartésienne $x(x^2 - y^2) + a(x^2 - y^2) = 0$.
3. (a) En déduire que $(C)$ admet le paramétrage rationnel $P(t)\begin{cases} x(t) &= -a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= -at\dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

   *Remarque : on notera que le point de paramètre t ne correspond pas nécessairement à celui de paramètre θ vu lors de l'étude de la représentation polaire de (C)).*

   (b) Déterminer les paramètres $t_1$ et $t_2$ du point double déterminé au 1e .

(c) Étudier les branches infinies de $(C)$.

(d) Montrer que $P(0) = M(0)$. *c'est-à-dire que pour les deux représentations, le point de paramètre* $0$ *est le même).* Retrouver le cercle osculateur obtenu en 1d en utilisant la représentation paramétrique de $(C)$.

**Exercice 8** Dans tout l'exercice, le corps de base est celui des réels. Le plan euclidien orienté usuel $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Si $M$ et $M'$ désignent deux points quelconques du plan, leur distance euclidienne est notée $MM'$.

<u>Notations</u> : si $\Gamma$ un arc birégulier du plan $\mathcal{P}$, on note$\left(M(t); \overrightarrow{T(t)}; \overrightarrow{N(t)}\right)$ le repère de Frenet de l'arc $\Gamma$ au point $M(t)$. L'arc $\Gamma$ étant paramétré par l'abscisse curviligne : $s \mapsto M(s)$, on note$\gamma(s)$ la courbure de $\Gamma$ au point $M(s)$, $R(s)$ le rayon de courbure de $\Gamma$ au point birégulier $M(s)$ et on rappelle que le centre de courbure de $\Gamma$ au point $M$ est le point $I$, défini par : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R.\overrightarrow{N}$.

On rappelle également les formules de Frenet : $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma.\overrightarrow{N}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma.\overrightarrow{T}$.

Soit $F$ et $F'$ les deux points du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives $\left(\sqrt{5}, 0\right)$ et $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$. On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que : $MF + MF' = 6$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$ ? Précisez ses éléments caractéristiques.
2. Former une équation cartésienne (sans radicaux) de $\mathcal{E}$.
   On choisit désormais de considérer le paramétrage de $\mathcal{E}$ défini sur $[0, 2\pi]$ par :
   $$x(t) = 3\cos(t)\,;\, y(t) = 2\sin(t).$$
3. Déterminer le repère de Frenet de cet arc au point $M(t)$, puis le rayon de courbure en ce point.
4. En déduire les coordonnées du centre de courbure de $\mathcal{E}$ associé au point $M(t)$.
5. On désigne par $\Gamma$ l'arc paramétré : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{5}{3}\cos^3(t) \\ \\ y(t) = -\dfrac{5}{2}\,\sin^3(t) \end{cases}$ . $\Gamma'$ est l'arc $\Gamma$ correspondant à $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
   En étudiant les fonctions $x$ et $y$, construire avec soin $\Gamma'$ ; on précisera les tangentes aux extrémités de $\Gamma'$.
6. Par quelles transformations géométriques déduit-on la construction de $\Gamma$ de celle de $\Gamma'$ ?
7. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ intérieure à la courbe fermée $\Gamma$.
8. Calculer la longueur de l'arc $\Gamma'$ puis celle de l'arc $\Gamma$.

**Exercice 9** Calculer le rayon de courbure au point correspondant à $\theta = 0$ de la courbe d'équation polaire
$$\rho(\theta) = \cos(\theta) + \cos(\frac{\theta}{2}).$$

**Exercice 10** Trouver les courbes birégulières dont le rayon de courbure vérifie :

1. $R = 1 + s^2$
2. $R = a\sqrt{s}$
3. $R\sin V = k\rho$ *(courbe en polaires* $\rho = \rho(\theta)$ *et l'angle* $V = \alpha - \theta$*).*
4. $R^2 + s^2 = a^2$

**Exercice 11** Déterminer tous les arcs plans biréguliers dont le cercle de courbure reste tangent à une droite fixe.

**Exercice 12** Déterminer la développée de la courbe paramétrée par : $x = t - \mathrm{th}t$ et $y = \frac{1}{\mathrm{ch}t}$.